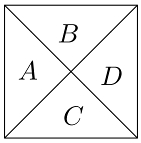
# Devoir de logique et calculabilité

A rendre avant le 16 décembre 2011.

Une *tuile de Wang* sur un alphabet fini de couleurs $\mathcal{C}$ est un quadruplet de couleurs $(A, B, C, D) \in \mathcal{C}^4$, que l'on représente:




Si $t$ est une tuile de Wang, on note $g(t)$ sa première composante ($A$ sur la figure), $b(t)$ sa troisième composante ($C$ sur la figure), $h(t)$ sa deuxième composante ($B$ sur la figure) et $d(t)$ sa dernière composante ($D$ sur la figure).

Si $\mathcal{T}$ est un ensemble (fini) de tuiles de Wang, un *pavage* $f$ d'une partie $\mathcal{E}$ du plan (identifié à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) est une application $f$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{T}$ telle que:

- pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}$, si $(i, j), (i + 1, j) \in \mathcal{E}$, alors $d(f(i, j)) = g(f(i + 1, j))$
- pour tour $(i, j) \in \mathbb{Z}$, si $(i, j), (i, j + 1) \in \mathcal{E}$, alors $h(f(i, j)) = b(f(i, j + 1))$.

## Question 1

Montrer que le problème suivant est indécidable:

**Donnée:** un ensemble fini de couleurs $\mathcal{C}$, un ensemble fini de tuiles de Wang $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{C}$ et une tuile $t_0 \in \mathcal{T}$

**Question:** existe-t-il un pavage $f$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $f(0, 0) = t_0$ ?

## Question 2

Montrer que le problème suivant est indécidable:

**Donnée:** un ensemble fini de couleurs $\mathcal{C}$, un ensemble fini de tuiles de Wang $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{C}$ et $t_0 \in \mathcal{T}$

**Question:** existe-t-il un pavage $f$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel qu'il existe $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, $f(i, j) = t_0$ ?

## Question 3

Soit $\mathcal{T}$ un ensemble fini de tuiles de Wang et $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble de variables propositionnelles $\{P_{i,j,t} : (i, j) \in \mathcal{E}, t \in \mathcal{T}\}$.

1. Donner un ensemble de formules propositionnelles $\mathcal{S}_{\mathcal{E},\mathcal{T}}$ sur $\mathcal{P}$ tel que $\mathcal{S}_{\mathcal{E},\mathcal{T}}$ est satisfaisable si et seulement si il existe un pavage de $\mathcal{E}$ par $\mathcal{T}$.
2. En déduire que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ peut être pavé par $\mathcal{T}$ si et seulement si tout carré $[0, .., n] \times [0, .., n]$ peut être pavé par $\mathcal{T}$.

## Question 4

Montrer que le problème suivant est indécidable:

**Donnée:** un ensemble fini $\mathcal{S}$ de clauses du premier ordre, sur l'alphabet de symboles de fonction $\{0(0), s(1)\}$.

**Question:** $\mathcal{S}$ est il satisfaisable ?

## Question 5

Un *pavage fini* de $\mathcal{E}$ par $\mathcal{T}$ est un pavage $f$ de $\mathcal{E}$ par $\mathcal{T} \cup \{b\}$ (où $b \notin \mathcal{T}$) tel que, $\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : f(i,j) \in \mathcal{T}\}$ est fini et non vide.

Montrer que, étant donnés, $\mathcal{C}$, $\mathcal{T}$, l'existence d'un pavage fini de $\mathbb{Z}^2$ est indécidable.

**Note:** L'ordre des questions n'est pas nécessairement pertinent.