Devoir de logique.

L'objet du problème est l'étude de logiques de "connaissances" utilisées notamment en intelligence artificielle.

Pour introduire le sujet, rappelons le casse-tête très connu sous le nom "les cocus de Bagdad". On suppose que, sur une île peuplée de n personnes, k d'entre elles sont atteintes d'une maladie, sans le savoir. En revanche, chacune a connaissance du statut (malade ou non) des autres personnes que lui-même. Chaque soir un bateau quitte l'île pour emmener les personnes qui se savent malades à l'hopital. En supposant $k > 0$, que personne ne communique sur les maladies et que chacun raisonne parfaitement, personne ne prend le bateau jusqu'au $k$ième jour, et ce ce jour là k personnes prennent le bateau.

Syntaxe

Les formules sont construites sur un ensemble de variables propositionnelles $\mathcal{P}$, $\bot, \top$, un ensemble fini de modalités $\mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_n$ (les "connaissances des agents" $1, \ldots, n$) et les connecteurs habituels du calcul propositionnel. L'ensemble des formules $\mathcal{F}$ est le plus petit ensemble tel que:

- Si $P \in \mathcal{P}$, P est une formule
- $\bot, \top$ sont des formules
- Si ϕ est une formule, $\mathbf{K}_1\phi, \ldots, \mathbf{K}_n\phi$ sont des formules.
- Si ϕ, ψ sont des formules, $\phi \vee \psi, \phi \wedge \psi, \phi \to \psi, \neg\phi$ sont des formules.

Un jugement est une expression $\Gamma \Rightarrow \phi$ où Γ est un ensemble fini de formules et ϕ est une formule.

Sémantique

Une *structure de Kripke* $\mathcal{S}$ est (dans ce contexte) un ensemble, muni de n relations d'équivalences $=_1, \ldots, =_n$, et d'une applications I de $\mathcal{S}$ dans $2^{\mathcal{P}}$. (Intuitivement, $=_i$ formalise l'indistinguabilité de deux interprétations par un agent i).

La relation de satisfaction (dans $\mathcal{S}$) est la relation $\models_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{F}$ définie par récurrence sur la formule:

- pour tout $\alpha \in \mathcal{S}$, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \top$ et $\alpha \not\models_{\mathcal{S}} \bot$
- $\alpha \models_{\mathcal{S}} P$ ssi $P \in I(\alpha)$
- $\alpha \models_{\mathcal{S}} \phi \wedge \psi$ ssi $\alpha \models_{\mathcal{S}} \phi$ et $\alpha \models_{\mathcal{S}} \psi$
- ...
- $\alpha \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_i\phi$ ssi, pour tout $\alpha =_i \beta$, $\beta \models_{\mathcal{S}} \phi$.

$\mathcal{S} \models \Gamma \Rightarrow \phi$ ssi, pour tout $\alpha \in \mathcal{S}$ tel que, pour tout $\psi \in \Gamma$, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \psi$, alors $\alpha \models_{\mathcal{S}} \phi$.

Un jugement $\Gamma \Rightarrow \phi$ est valide si pour toute structure de Kripke $\mathcal{S}$, $\mathcal{S} \models \Gamma \Rightarrow \phi$.

Question 1

Parmi les jugements suivants, lesquels sont valides (ϕ, ψ sont des formules arbitraires) ? Justifier.

1. $\Rightarrow \mathbf{K}_i \top$
2. $\Rightarrow \phi \vee \neg\phi$
3. $\mathbf{K}_i\phi \Rightarrow \phi$
4. $\phi \Rightarrow \mathbf{K}_i\phi$
5. $\Rightarrow \mathbf{K}_i\phi \vee \mathbf{K}_i\neg\phi$
6. $\mathbf{K}_i\phi \Rightarrow \mathbf{K}_i \mathbf{K}_i\phi$
7. $\mathbf{K}_i\phi, \mathbf{K}_i\psi \Rightarrow \mathbf{K}_i(\phi \wedge \psi)$
8. $\mathbf{K}_i \mathbf{K}_j\phi \Rightarrow \mathbf{K}_j \mathbf{K}_i\phi$
9. $\phi \Rightarrow \mathbf{K}_i\neg \mathbf{K}_i\neg\phi$
10. $\neg \mathbf{K}_i\phi \Rightarrow \mathbf{K}_i\neg \mathbf{K}_i\phi$
11. $\mathbf{K}_i(\phi \vee \mathbf{K}_i\psi \vee \neg \mathbf{K}_i\theta) \Rightarrow \mathbf{K}_i\phi \vee \mathbf{K}_i\psi \vee \neg \mathbf{K}_i\theta$

Question 2

On ajoute aux règles de déduction naturelle les axiomes 3, 6, 10 ci-dessus ainsi que les règles d'inférence (pour $m \geq 0$ et $i = 1, \ldots, n$):

$$\frac{\phi_1, \ldots, \phi_m \Rightarrow \psi}{\mathbf{K}_i\phi_1, \ldots, \mathbf{K}_i\phi_m \Rightarrow \mathbf{K}_i\psi}\, KI$$

1. Montrer que les jugements valides de la question 1 sont prouvables dans ce système
2. Montrer que le système d'inférence est correct

Question 3

L'objet de la question est de montrer la complétude du système d'inférence précédent pour la sémantique de Kripke.

Si Γ est un ensemble de formules, on note Γ^* l'ensemble des formules ϕ telles qu'il existe un sous-ensemble fini $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tel que $\Gamma_0 \Rightarrow \phi$ est dérivable dans notre système d'inférence. Un ensemble de formules Γ est *incohérent* si $\bot \in \Gamma^*$. Il est *maximal cohérent* si $\bot \notin \Gamma$ et, pour toute formule $\phi \notin \Gamma$, $\bot \in (\Gamma \cup \{\phi\})^*$.

1. On suppose que Γ est fini et cohérent et $\Gamma \Rightarrow \phi$ est non dérivable.
   (a) Montrer qu'il existe un ensemble Γ' maximal cohérent contenant Γ et $\neg\phi$

(b) On considère la structure de Kripke $\mathcal{S}$ des ensembles maximaux cohérents de formules, muni des relations d'équivalence $\Delta =_i \Theta$ ssi $\{ \mathbf{K}_i\phi,\ \mathbf{K}_i\phi \in \Delta\} = \{ \mathbf{K}_i\phi,\ \mathbf{K}_i\phi \in \Theta\}$ et de la valuation $I(\Delta) = \mathcal{P} \cap \Delta$. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathcal{S}$ et toute formule ψ, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \psi$ si et seulement si $\psi \in \alpha$.

(c) Montrer que $\mathcal{S} \not\models \Gamma \Rightarrow \phi$

2. Montrer la complétude du sytème d'inférence.

3. L'axiome 3 est il nécessaire à la complétude ?

Question 4

Dans cette question, on suppose que $n = 1$ et on omettra donc l'indice des modalités $\mathbf{K}$.

1. Montrer que, pour toutes formules $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m$

$$\mathbf{K}\phi_1, \ldots,\ \mathbf{K}\phi_n \Rightarrow\ \mathbf{K}\psi_1 \vee \ldots \vee\ \mathbf{K}\psi_m$$

est valide si et seulement s'il existe un $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\mathbf{K}\phi_1, \ldots,\ \mathbf{K}\phi_n \Rightarrow \psi_i$ est valide.

2. On note $\widetilde{\mathbf{K}}\phi$ la formule $\neg\ \mathbf{K}\neg\phi$. Si Γ est un ensemble fini de formules, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \Gamma$ ssi, pour toute formule $\gamma \in \Gamma$, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \gamma$.

   Montrer que, étant donné un ensemble fini de formules Γ, on peut calculer en temps linéaire un ensemble Γ' de formules (qui peuvent contenir $\widetilde{\mathbf{K}}$), tel que

   - pour toute structure de Kripke $\mathcal{S}$ et tout $\alpha \in \mathcal{S}$, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \Gamma$ ssi $\alpha \models_{\mathcal{S}} \Gamma'$.
   - Γ' ne contient pas $\rightarrow$ et les négations n'apparaissent que devant les variables propositionnelles
   - Si $\mathbf{K}\phi$ est une sous formule de Γ', alors ϕ ne contient ni $\mathbf{K}$, ni $\widetilde{\mathbf{K}}$.

3. Montrer la propriété de petit modèle suivante: si $\Gamma \Rightarrow \phi$ n'est pas valide, alors il existe une structure de Kripke $\mathcal{S}$ et $\alpha \in \mathcal{S}$ tels que

   - $\alpha \not\models_{\mathcal{S}} \phi$,
   - pour tout $\psi \in \Gamma$, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \psi$
   - Le cardinal de $\mathcal{S}$ est linéaire dans la taille de Γ, ϕ.

4. Montrer que le problème de validité d'un jugement est co-NP complet.

On peut poser beaucoup d'autres questions (ce que nous ne faisons pas ici) comme la généralisation de la question 4 à un nombre arbitraire d'agents (le problème devient PSPACE-complet), l'ajout d'une modalité de "connaissance commune", avec les règles correspondantes, la formalisation des problèmes du type de celui des cocus de Bagdad,...

Solution

Question 1

1. Le jugement est valide: pour toute structure $\mathcal{S}$ et tout $\alpha \in \mathcal{S}$, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \top$, en particulier, pour tout $\beta =_i \alpha$, $\beta \models_{\mathcal{S}} \top$ et donc $\alpha \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_i\top$.

2. Le jugement est valide: pour toute structure $\mathcal{S}$, pour tout $\alpha \in \mathcal{S}$, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \phi$ ou $\alpha \models_{\mathcal{S}} \neg\phi$.

3. Le jugement est valide: pour toute structure $\mathcal{S}$, pour tout $\alpha \in \mathcal{S}$, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_i\phi$ entraine $\beta \models_{\mathcal{S}} \phi$ si $\beta =_i \alpha$, en particulier lorsque $\alpha = \beta$.

4. Le jugement n'est pas valide. On considère la structure de Kripke suivante: $n = 1$, $\mathcal{S} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\alpha_1 =_1 \alpha_2$, $I(\alpha_1) = \{P\}$, $I(\alpha_2) = \emptyset$ et $\phi = P$. $\alpha_1 \models_{\mathcal{S}} \phi$, mais $\alpha_1 \not\models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_1\phi$ puisque $\alpha_2 \not\models_{\mathcal{S}} \phi$.

5. Le jugement n'est pas valide. Considérer la structure de Kripke à deux éléments $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ (avec $\mathcal{P} = \{P\}$ et un seul agent), dans laquelle $I(\alpha_1) = \emptyset$, $I(\alpha_2) = \{P\}$ et $\alpha_1 =_1 \alpha_2$. Alors $\alpha_1 \not\models \mathbf{K}P$ et $\alpha_1 \not\models \mathbf{K}\neg P$. Intuitivement, l'agent n'a aucune information sur l'interpétation de P.

6. Le jugement est valide. Soit $\mathcal{S}$ une structure de Kripke et $\alpha \in \mathcal{S}$ tel que $\alpha \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_i\phi$. Si $\beta =_i \alpha$, $\beta \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_i\phi$ puisque, pour tout $\gamma =_i \beta$, $\gamma =_i= \alpha$ par transitivité et donc $\gamma \models_{\mathcal{S}} \phi$. Comme, pour tout $\beta =_i \alpha$, $\beta \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_i\phi$, par définition, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_i\ \mathbf{K}_i\phi$.

7. Le jugement est valide. Soit $\mathcal{S}$ une structure de Kripke et $\alpha \in \mathcal{S}$ tel que $\alpha \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_i\phi$ et $\alpha \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_i\psi$. Soit enfin $\beta =_i \alpha$. Par définition, $\beta \models_{\mathcal{S}} \phi$ et $\beta \models_{\mathcal{S}} \psi$. Donc $\beta \models_{\mathcal{S}} \phi \wedge \psi$. Comme ce résultat est vrai pour tout $\beta =_i \alpha$, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}(\phi \wedge \psi)$.

8. Le jugement n'est pas valide. On construit la structure de Kripke à 3 sommets $\{a, b, c\|$ avec $b =_1 c$, $a =_2 b$ et $I(a) = I(b) = \{P\}$, $I(c) = \emptyset$. $a \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_2P$ puisque $b \models_{\mathcal{S}} P$ et $a \models_{\mathcal{S}} P$. Donc $a \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_1\ \mathbf{K}_2P$, puisque a est seul dans sa classe pour $=_1$.

   Mais $b \not\models \mathbf{K}_1P$ puisque $b =_1 c$ et $P \notin I(c)$. Donc $a \not\models \mathbf{K}_2\ \mathbf{K}_1P$ puisque $a =_2 b$.

9. Le jugement est valide. Soit $\mathcal{S}$ et $\alpha \in \mathcal{S}$ tels que $\alpha \models_{\mathcal{S}} \phi$. Soit $\beta =_i \alpha$. Comme il existe $\gamma =_i \beta$ tel que $\gamma \not\models_{\mathcal{S}} \neg\phi$ (prendre $\gamma = \alpha$), $\beta \not\models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_i\neg\phi$, donc $\beta \models_{\mathcal{S}} \neg\ \mathbf{K}_i\neg\phi$. Comme β a été choisi quelconque dans la classe d'équivalence de α, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_i\neg\ \mathbf{K}_i\neg\phi$.

10. Le jugement est valide. Si $\alpha \models_{\mathcal{S}} \neg\ \mathbf{K}_i\phi$, alors il existe $\beta =_i \alpha$, $\beta \models_{\mathcal{S}} \neg\phi$. Et, pour tout $\gamma =_i \alpha$, $\beta =_i \gamma$ est tel que $\beta \models_{\mathcal{S}} \neg\phi$. Donc, pour tout $\gamma =_i \alpha$, $\gamma \models_{\mathcal{S}} \neg\ \mathbf{K}_i\phi$. Donc $\alpha \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_i\neg\ \mathbf{K}_i\phi$.

11. Le jugement est valide. Supposons que $\alpha \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_i(\phi \vee\ \mathbf{K}_i\psi \vee \neg\ \mathbf{K}_i\theta)$. Alors, pour tout $\beta =_i \alpha$, $\beta \models_{\mathcal{S}} \phi \vee\ \mathbf{K}_i\psi \vee \neg\ \mathbf{K}_i\theta$.

    - Si il existe $\gamma =_i \alpha$ tel que $\gamma \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_i\psi$, alors, pour tout $\beta =_i \gamma$, $\beta \models \psi$ et donc, pour tout $\beta =_i \alpha$, $\beta \models_{\mathcal{S}} \psi$ et donc $\alpha \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_i\psi$.
    - Si il existe $\gamma =_i \alpha$ tel que $\gamma \models_{\mathcal{S}} \neg\ \mathbf{K}_i\theta$, alors $\gamma \not\models \mathbf{K}_i\theta$ et donc il existe $\beta =_i \gamma$ tel que $\beta \not\models_{\mathcal{S}} \theta$. Donc il existe $\beta =_i \alpha$ tel que $\beta \not\models_{\mathcal{S}} \theta$ et ainsi $\alpha \not\models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_i\theta$. Il en résulte que $\alpha \models_{\mathcal{S}} \neg\ \mathbf{K}_i\theta$.

- Sinon, pour tout $\gamma =_i \alpha$, $\gamma \not\models_{\mathcal{S}} \neg\ \mathbf{K}_i\theta$ et $\gamma \not\models_{\mathcal{S}}\ \mathbf{K}_i\psi$, donc, pour tout $\gamma =_i \alpha$, $\gamma \models_{\mathcal{S}} \phi$, et ainsi $\alpha \models_{\mathcal{S}}\ \mathbf{K}_i\phi$

Comme on est toujours dans l'un des trois cas ci-dessus, $\alpha \models_{\mathcal{S}}\ \mathbf{K}_i\psi \vee \neg\ \mathbf{K}_i\theta \vee\ \mathbf{K}_i\phi$.

Question 2

On se permet d'utiliser le résultat de complétude de la déduction naturelle en calcul propositionnel. En particulier le lemme suivant: si $\Gamma \Rightarrow \phi$ et $\Gamma', \phi \Rightarrow \psi$ sont prouvables, alors $\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \psi$ est prouvable.

1. En dehors des axiomes et des jugements non valides, il reste 4 preuves à effectuer.

$$\dfrac{\dfrac{}{\Rightarrow \top}}{\Rightarrow\ \mathbf{K}\top}\,KI$$

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\phi, \psi \Rightarrow \phi \wedge \psi}}{\mathbf{K}\phi,\ \mathbf{K}\psi \Rightarrow\ \mathbf{K}(\phi \wedge \psi)}\,KI$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{K}_i\neg\phi \Rightarrow \neg\phi}}{\phi,\ \mathbf{K}_i\neg\phi \Rightarrow \neg\phi}\,Aff \qquad \dfrac{}{\phi,\ \mathbf{K}_i\neg\phi \Rightarrow \phi}}{\phi,\ \mathbf{K}_i\neg\phi \Rightarrow \bot}\,\neg_e}{\phi \Rightarrow \neg\ \mathbf{K}_i\neg\phi}\,Abs \qquad \dfrac{}{\neg\ \mathbf{K}_i\neg\phi \Rightarrow\ \mathbf{K}_i\neg\ \mathbf{K}_i\neg\phi}}{\phi \Rightarrow\ \mathbf{K}_i\neg\ \mathbf{K}_i\neg\phi}\,\text{Lemma}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cdots}{\neg\ \mathbf{K}_i\psi \Rightarrow\ \mathbf{K}_i\neg\ \mathbf{K}_i\psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\mathbf{K}_i\theta \Rightarrow\ \mathbf{K}_i\ \mathbf{K}_i\theta} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\phi \vee\ \mathbf{K}_i\psi \vee \neg\ \mathbf{K}_i\theta,\ \mathbf{K}_i\theta, \neg\ \mathbf{K}_i\psi \Rightarrow \phi}}{\mathbf{K}_i(\phi \vee\ \mathbf{K}_i\psi \vee \neg\ \mathbf{K}_i\theta),\ \mathbf{K}_i\ \mathbf{K}_i\theta,\ \mathbf{K}_i\neg\ \mathbf{K}_i\psi \Rightarrow\ \mathbf{K}_i\phi}\,KI}{\mathbf{K}_i(\phi \vee\ \mathbf{K}_i\psi \vee \neg\ \mathbf{K}_i\theta),\ \mathbf{K}_i\theta,\ \mathbf{K}_i\neg\ \mathbf{K}_i\psi \Rightarrow\ \mathbf{K}_i\phi}\,L1}{\dfrac{\mathbf{K}_i(\phi \vee\ \mathbf{K}_i\psi \vee \neg\ \mathbf{K}_i\theta),\ \mathbf{K}_i\theta, \neg\ \mathbf{K}_i\psi \Rightarrow\ \mathbf{K}_i\phi}{\cdots}}\,L1}{\mathbf{K}_i(\phi \vee\ \mathbf{K}_i\psi \vee \neg\ \mathbf{K}_i\theta) \Rightarrow\ \mathbf{K}_i\phi \vee \neg\ \mathbf{K}_i\theta \vee\ \mathbf{K}_i\psi}$$

2. On raisonne par récurrence sur la preuve. Les axiomes ont été montrés valides dans la question 1. Les règles de la déduction naturelle ont été prouvées correctes en cours et l'extension aux structures de Kripke ne change rien à la preuve. Il ne reste que la règle KI.

Supposons $\phi_1, \ldots, \phi_m \Rightarrow \psi$ valide.

Soit $\mathcal{M}$ une structure de Kripke et $\alpha \in \mathcal{M}$ tels que $\alpha \models_{\mathcal{M}} \mathbf{K}_i\phi_1, \ldots, \mathbf{K}_i\phi_m$. Soit $\beta =_i \alpha$. Par définition, $\beta \models_{\mathcal{M}} \phi_1, \ldots, \phi_m$. Par validité de $\phi_1, \ldots, \phi_m$, $\beta \models_{\mathcal{S}} \psi$. Ce résultat étant vrait pour tout $\beta =_i \alpha$, on a $\alpha \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_i\psi$. $\mathcal{M}$ et α sont arbitraires: $\mathbf{K}_i\phi_1, \ldots, \mathbf{K}_i\phi_m \Rightarrow \phi$ est donc valide.

Question 3

1. (a) On considère une énumération des formules $\phi_0, \ldots, \phi_n, \ldots$. On définit la suite Γ_n comme suit: $\Gamma_0 = \Gamma \cup \{\neg\phi\}$ et $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ si $\phi_n \in \Gamma_n^*$, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\phi_n\}$ sinon.

   Soit $\Sigma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$. Montrons que Σ est cohérent:

   Par l'absurde, si $\Sigma' \subseteq \Sigma$ est un sous-ensemble fini de Σ tel que $\Sigma' \Rightarrow \perp$ est prouvable, alors Σ' est un sous-ensemble de l'un des Γ_i. Prenons le d'indice minimal. $i \neq 0$ puisque, par hypothèse, $\Gamma \Rightarrow \phi$ n'est pas dérivable et donc $\perp \notin (\Gamma \cup \{\neg\phi\})^*$ (on utilise la règle Abs). Ou bien $\Gamma_i = \Gamma_{i-1} \cup \{\phi_i\}$ et, dans ce cas, $\phi_i \in \Gamma_{i-1}^*$ et donc $\perp \in \Gamma_{i-1}^*$, ce qui contredit la minimalité de i. Ou bien $\Gamma_i = \Gamma_{i-1} \cup \{\neg\phi_i\}$ et, dans ce cas, $\perp \in \Gamma_i^*$ entraine que $\Gamma_{i-1}, \neg\phi_i \vdash \perp$ est prouvable, ce qui entraine $\Gamma_{i-1} \vdash \perp$ dérivable (par Abs). Mais ce n'est pas possible puisque $\Gamma_i = \Gamma_{i-1} \cup \{\neg\phi_i\}$ seulement si $\phi_i \notin \Gamma_{i-1}^*$.

   Dans tous les cas on obtient une contradiction: $\perp \notin \Sigma^*$. Donc Σ est cohérent.

   On remarque ensuite que, pour toute formule ϕ, $\phi \in \Sigma$ ou $\neg\phi \in \Sigma$. Donc pour toute formule ϕ, si $\phi \notin \Sigma$, $\neg\phi \in \Sigma$ et donc $\perp \in (\Sigma \cup \{\phi\})^*$: Σ est maximal cohérent.

   (b) On montre le résultat par récurrence sur ϕ. (Note, nous n'avons jusqu'ici utilisé que le raisonnement par l'absurde, Ax, $\neg_e$ et $\neg_i$ dans la question précédente. Tous les autres axiomes ou règles qui sont nécessaires doivent apparaitre dans la preuve ci-dessous).

   Si $\phi \in \mathcal{P}$, par définition, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \phi$ ssi $\phi \in \alpha$.

   Si $\phi = \neg\psi$. $\alpha \models_{\mathcal{S}} \phi$ ssi $\alpha \not\models_{\mathcal{S}} \psi$ ssi (par hypothèse de récurrence) $\psi \notin \alpha$ ssi $\neg\psi \in \alpha$ (par maximalité de α).

   Si $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$. $\alpha \models_{\mathcal{S}} \phi_1 \wedge \phi_2$ ssi $\alpha \models_{\mathcal{S}} \phi_1$ et $\alpha \models_{\mathcal{S}} \phi_2$ ssi (par hypothèse de récurrence) $\phi_1, \phi_2 \in \alpha$. Mais $\phi_1, \phi_2 \Rightarrow \phi_1 \wedge \phi_2$ est dérivable ($\wedge_i$), donc (par maximalité de α), $\phi_1 \wedge \phi_2 \in \alpha$. Récriproquement, si $\phi_1 \wedge \phi_2 \in \alpha$, ϕ_1, ϕ_2 sont dérivables ($\wedge_e$) et donc $\phi_1, \phi_2 \in \alpha$.
   Donc $\alpha \models_{\mathcal{S}} \phi_1 \wedge \phi_2$ ssi $\phi_1 \wedge \phi_2 \in \alpha$.

   Si $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ $\alpha \models_{\mathcal{S}} \phi$ ssi $\alpha \models_{\mathcal{S}} \phi_1$ ou $\alpha \models_{\mathcal{S}} \phi_2$ ssi (par hypothèse de récurrence), $\phi_1 \in \alpha$ ou $\phi_2 \in \alpha$. $\phi_1 \Rightarrow \phi_1 \vee \phi_2$ et $\phi_2 \Rightarrow \phi_1 \vee \phi_2$ sont dérivables (en utilisant $\vee_i$). Donc, par maximalité de α, $\phi_1 \vee \phi_2 \in \alpha$. Réciproquement, si $\phi_1 \vee \phi_2 \in \alpha$, on ne peut pas avoir à la fois $\neg\phi_1 \in \alpha$ et $\neg\phi_2 \in \alpha$, sinon (par $\vee_e$), $\perp \in \alpha$. Par maximalité, il en résulte que $\phi_1 \in \alpha$ ou $\phi_2 \in \alpha$.

   Si $\phi = \phi_1 \to \phi_2$ ** a completer **

   Si $\phi = \mathbf{K}_i\psi$, $\alpha \models_{\mathcal{S}} \phi$ entraine que, pour tout β tel que $\alpha =_i \beta$, $\beta \models \psi$. Par hypothèse de récurrence, si $\alpha =_i \beta$, alors $\psi \in \beta$.
   Soit $\alpha' = \{\mathbf{K}_i\theta \mid \mathbf{K}_i\theta \in \alpha\} \cup \{\neg\mathbf{K}_i\theta' \mid \neg\mathbf{K}_i\theta' \in \alpha\}$. $\alpha' \subseteq \alpha$ et, si α'' est un sous-ensemble fini de α', alors ou bien $\alpha'' \Rightarrow \psi$ est prouvable et, dans ce cas,

en utilisant KI, $\{\ \mathbf{K}_i\theta | \theta \in \alpha''\} \Rightarrow\ \mathbf{K}_i\psi\}$ est dérivable. Or d'après (10) et (6), $\{\ \mathbf{K}_i\theta |\ \theta \in \alpha''\} \subseteq \alpha' \subseteq \alpha$, donc $\mathbf{K}_i\psi \in \alpha$.
Ou bien il n'existe aucun sous-ensemble fini α'' de α' tel que $\alpha'' \Rightarrow \psi$ n'est dérivable. Dans ce cas, on considère un ensemble maximal consistant β contenant α' et $\neg\psi$ (il existe d'après la question précédente). On remarque alors que $\beta =_i \alpha$ (aussi à cause de (10) et (6)). Donc $\beta \models \psi$, ce qui est absurde puisque $\neg\psi \in \beta$. Ce cas ne se produit donc pas et on a bien $\mathbf{K}_i\psi \in \alpha$.
Réciproquement, si $\phi \in \alpha$, alors, pour tout $\beta =_i \alpha$, $\phi \in \beta$. De plus, comme $\mathbf{K}_i\psi \Rightarrow \psi$ est prouvable, $\psi \in \beta$. Donc, par hypothèse de récurrence, $\beta \models_{\mathcal{S}} \psi$. Il en résulte que $\alpha \models_{\mathcal{S}}\ \mathbf{K}_i\psi$.

(c) D'après (a), il existe un Γ' cohérent maximal contenant Γ et $\neg\phi$; $\Gamma' \in \mathcal{S}$ (nous le notons $\alpha_{\Gamma'}$ pour éviter les confusions). D'après (b), pour toute formule $\psi \in \Gamma \subseteq \Gamma'$, $\alpha_{\Gamma'} \models_{\mathcal{S}} \psi$ et, comme $\neg\phi \in \alpha_{\Gamma'}$, $\phi \notin \alpha_{\Gamma'}$ par cohérence, donc $\alpha_{\Gamma'} \not\models_{\mathcal{S}} \phi$. Il en résulte que $\alpha_{\Gamma'} \not\models_{\mathcal{S}} \Gamma \Rightarrow \phi$.

2. Si $\Gamma \Rightarrow \phi$ n'est pas prouvable, d'après la question précedente, il existe une structure $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{S} \not\models \Gamma \Rightarrow \phi$. Par contraposée, si $\Gamma \Rightarrow \phi$ est valide, il est prouvable.

3. Cet axiome est nécessaire. Pour le prouver, on considère l'interprétation suivante des jugements: $\overline{\phi}$ est la formule dans laquelle toutes les sous-formules $\mathbf{K}_i\psi$ de ϕ sont remplacées par $\top$ et $J(\phi_1, \ldots, \phi_n \Rightarrow \phi) = 1$ si $\overline{\phi_1}, \ldots, \overline{\phi_n} \Rightarrow \overline{\phi}$ est valide en logique propositionnelle classique et $J(\phi_1, \ldots, \phi_n \Rightarrow \phi) = 0$ sinon.

   On note que, dans le système de preuve privé de l'axiome 3, $J(\Gamma \Rightarrow \phi) = 1$ est un invariant: on ne peut prouver que des formules ayant cette propriété. Or elle n'est pas satisfaite pour, par exemple, $\mathbf{K}_iP \Rightarrow P$. Il ne peut donc pas y avoir de preuve de $\mathbf{K}_iP \Rightarrow P$ en utilisant les autres règles.

Question 4

1. Si $\mathbf{K}\phi_1, \ldots, \mathbf{K}\phi_n \Rightarrow \psi_i$ est valide, alors, par complétude, $\mathbf{K}\phi_1, \ldots, \mathbf{K}\phi_n \Rightarrow \psi_i$ est prouvable, et donc, en utilisant KI, $\mathbf{K}\ \mathbf{K}\phi_1, \ldots, \mathbf{K}\ \mathbf{K}\phi_n \Rightarrow \mathbf{K}\psi_i$ est prouvable. Il en résulte que $\mathbf{K}\phi_1, \ldots, \mathbf{K}\phi_n \Rightarrow\ \mathbf{K}\psi_1 \vee \cdots \vee\ \mathbf{K}\psi_m$ est prouvable et donc valide, par correction.

   Réciproquement, si aucun des jugements $\mathbf{K}\phi_1, \ldots, \mathbf{K}\phi_n \Rightarrow \psi_i$ n'est valide, il existe des structures de Kripke $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_m$ et $\alpha_1 \in \mathcal{S}_1, \ldots, \alpha_m \in \mathcal{S}_m$ tels que, pour tout i, $\alpha_i \not\models_{\mathcal{S}_i} \psi_i$ et, pour tout j, $\alpha_i \models_{\mathcal{S}_i}\ \mathbf{K}\phi_j$. On construit alors la structure de Kripke $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \uplus \cdots \uplus \mathcal{S}_m$, avec l'interprétation I qui est le prolongement des I_i. De plus, on ajoute à la relation d'équivalence $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m$.

   Dans cette structure, $\alpha_i \models_{\mathcal{S}}\ \mathbf{K}\phi_j$ pour tous i, j. Par ailleurs, pour tout i, il existe $\alpha_i = \alpha_1$ tel que $\alpha_i \not\models_{\mathcal{S}} \psi_i$. Donc, pour tout i, $\alpha_1 \not\models_{\mathcal{S}}\ \mathbf{K}\psi_i$. Il en résulte que $\alpha_1 \not\models_{\mathcal{S}}\ \mathbf{K}\psi_1 \vee \cdots \vee\ \mathbf{K}\psi_m$.

2. L'idée était de commencer par éliminer les implications, puis de pousser les négations, de manière à ce qu'elles soient devant les modalités ou devant les variables propositionnelles. Ces deux premières étapes se font en temps linéaire (au plus doublement de la taille de la formule) et préservent les modèles.

Dans un deuxième temps, pousser les modalités en utilisant d'une part $\mathbf{K}(\phi \wedge \psi) \rightsquigarrow \mathbf{K}\phi \wedge \mathbf{K}\psi$ (qui préserve les modèles), $\mathbf{K}\,\mathbf{K}\phi \rightsquigarrow \mathbf{K}\phi$ et $\mathbf{K}\neg\,\mathbf{K}\phi \rightsquigarrow \neg\,\mathbf{K}\phi$ qui préservent aussi les modèles.

Après ces étapes les occurrences de $\mathbf{K}$ sont seulement dans des formules $\mathbf{K}(\phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n)$. L'idée est alors d'utiliser léquivalence $\mathbf{K}(\phi \vee \mathbf{K}\psi \vee \neg\,\mathbf{K}\theta) \mathrel{\models\!\!\dashv} \mathbf{K}\phi \vee \mathbf{K}\psi \vee \neg\,\mathbf{K}\theta$ pour pousser à nouveau les modalités.

Mais à ce point là, il y a une erreur (au moins dans la preuve attendue de la question): il reste des situations dans lesquelles les modalités sont imbriquées. Par exemple $\mathbf{K}((\phi_1 \wedge \mathbf{K}\phi_2) \vee \phi_3)$. Dans ce cas, on peut aussi pousser les modalités, mais à un coût qui n'est plus linéaire:

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{K}((\phi_1 \wedge \mathbf{K}\phi_2) \vee \phi_3) & \rightsquigarrow & \mathbf{K}((\phi_1 \vee \phi_3) \wedge (\mathbf{K}\phi_2 \vee \phi_3)) \\
& \rightsquigarrow & \mathbf{K}(\phi_1 \vee \phi_3) \wedge \mathbf{K}(\mathbf{K}\phi_2 \vee \phi_3) \\
& \rightsquigarrow & \mathbf{K}(\phi_1 \vee \phi_3) \wedge (\mathbf{K}\phi_2 \vee \mathbf{K}\phi_3)
\end{array}$$

La formule ϕ_3 est dupliquée et la mise en forme normale des formules (au moins suivant cette méthode) est exponentielle dans le pire cas.

3. Cette question est correcte, mais la preuve n'utilise pas en fait la question précédente.

   On remarque la propriété suivante: $\theta \mathrel{\models\!\!\dashv} (\mathbf{K}\phi \wedge \theta[\top/\,\mathbf{K}\phi]) \vee (\neg\,\mathbf{K}\phi \wedge \theta[\bot/\,\mathbf{K}\phi])$. Informellement: on peut deviner si $\mathbf{K}\phi$ est satisfait ou non et, selon ce qu'on a deviné, remplacer $\mathbf{K}\phi$ par $\top$ ou $\bot$ dans la formule.

   Prouvons l'équivalence logique dans le cas d'une modalité unique, par récurrence sur le contexte dans lequel apparait $\mathbf{K}\phi$ (ou, par récurrence sur θ).

   - Si $\theta = \mathbf{K}\phi$, alors on a bien $\theta \mathrel{\models\!\!\dashv} (\mathbf{K}\phi \wedge \top) \vee (\neg\,\mathbf{K}\phi \wedge \bot)$
   - Si $\theta = \theta_1 \wedge \theta_2$, par hypothèse de récurrence, $\theta_i \mathrel{\models\!\!\dashv} (\mathbf{K}\phi \wedge \theta_i[\top/\,\mathbf{K}\phi]) \vee (\neg\,\mathbf{K}\phi \wedge \theta_i[\bot/\,\mathbf{K}\phi])$. Donc

   $$\begin{array}{rcl}
   \theta_1 \wedge \theta_2 & \mathrel{\models\!\!\dashv} & ((\mathbf{K}\phi \wedge \theta_1[\top/\,\mathbf{K}\phi]) \vee (\neg\,\mathbf{K}\phi \wedge \theta_1[\bot/\,\mathbf{K}\phi])) \\
   & & \wedge((\mathbf{K}\phi \wedge \theta_2[\top/\,\mathbf{K}\phi]) \vee (\neg\,\mathbf{K}\phi \wedge \theta_2[\bot/\,\mathbf{K}\phi])) \\
   & \mathrel{\models\!\!\dashv} & (\mathbf{K}\phi \wedge (\theta_1 \wedge \theta_2)[\top/\,\mathbf{K}\phi]) \vee (\neg\,\mathbf{K}\phi \wedge (\theta_1 \wedge \theta_2)[\bot/\,\mathbf{K}\phi])
   \end{array}$$

   - Si $\theta = \neg\psi$, par hypothèse de récurrence,

   $$\psi \mathrel{\models\!\!\dashv} (\mathbf{K}\phi \wedge \psi[\top/\,\mathbf{K}\phi]) \vee (\neg\,\mathbf{K}\phi \wedge \psi[\bot/\,\mathbf{K}\phi])$$

     D'où

   $$\begin{array}{rcl}
   \neg\psi & \mathrel{\models\!\!\dashv} & (\neg\,\mathbf{K}\phi \vee \neg\psi[\top/\,\mathbf{K}\phi]) \wedge (\mathbf{K}\phi \vee \neg\psi[\bot/\,\mathbf{K}\phi]) \\
   & \mathrel{\models\!\!\dashv} & (\mathbf{K}\phi \wedge \neg\psi[\top/\,\mathbf{K}\phi]) \vee (\neg\,\mathbf{K}\phi \wedge \neg\psi[\bot/\,\mathbf{K}\phi])
   \end{array}$$

     Les autres connecteurs logiques $(\vee, \rightarrow)$ se traitent de manière aussi immédiate

   - Si $\theta = \mathbf{K}\psi$, pour une structure de Kripke arbitraire $\mathcal{S}$ et $\alpha \in \mathcal{S}$. $\alpha \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}\psi$ ssi pour tout $\beta = \alpha$, $\beta \models_{\mathcal{S}} \psi$. Par hypothèse de récurrence, $\beta \models_{\mathcal{S}} \psi$ ssi $\beta \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}\phi \wedge \psi[\top/\,\mathbf{K}\phi]$ ou $\beta \models_{\mathcal{S}} \neg\,\mathbf{K}\phi \wedge \psi[\bot/\,\mathbf{K}\phi]$.

     Mais $\beta \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}\phi$ ssi $\alpha \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}\phi$ ssi pour tout $\gamma = \beta$, $\gamma \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}\phi$. Donc, pour tout $\gamma = \alpha$, $\gamma \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}\phi \wedge \psi[\top/\,\mathbf{K}\phi]$ ou bien, pour tout $\gamma = \alpha$, $\gamma \models_{\mathcal{S}} \neg\,\mathbf{K}\phi \wedge \psi[\bot/\,\mathbf{K}\phi]$.

Il en résulte que $\alpha \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}(\mathbf{K}\phi \wedge \psi[\top/\mathbf{K}\phi])$ ou $\alpha \models_{\mathcal{S}} \mathbf{K}(neg\ \mathbf{K}\phi \wedge \psi[\bot/\mathbf{K}\phi])$. En utilisant les axiomes (valides),

$$\alpha \models_{\mathcal{S}} (\mathbf{K}\phi \wedge \mathbf{K}\psi[\top/\mathbf{K}\phi]) \vee neg\ \mathbf{K}\phi \wedge \mathbf{K}\psi[\bot/\mathbf{K}\phi])$$

Noter que cette propriété est fausse avec deux modalités, car le remplacement ne peut pas se faire sous une modalité sans altérer les modèles.

Par récurrence sur le nombre d'occurrences de modalités dans la formule θ, θ est logiquement équivalente à une disjonction de formules de la forme

$$\mathbf{K}\phi_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{K}\phi_n \wedge \neg \mathbf{K}\psi_1 \wedge \cdots \wedge \neg \mathbf{K}\psi_m \wedge \omega$$

où aucune des formules $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m, \omega$ ne contient de modalité (nous appellerons ces formules *simples*) et la taille de $\mathbf{K}\phi_1 \wedge \cdots \wedge K\phi_n \wedge \neg \mathbf{K}\psi_1 \wedge \cdots \wedge \neg \mathbf{K}\psi_m \wedge \omega$ est inférieure ou égale à 2 fois celle de θ. (Noter cependant que le nombre de formules dans la disjonction peut être exponentiel dans le nombres d'occurrences de $\mathbf{K}$ dans θ).

- Dans le cas de base, il n'y a pas d'occurrence de $\mathbf{K}$ dans θ et il suffit de prendre θ elle même qui est une formule simple.
- Si $\theta = \mathbf{K}\psi$ ou $\theta = \neg \mathbf{K}\psi$ où ψ ne contient pas de modalité, θ est à nouveau une formule simple.
- Sinon, $\theta = C[\mathbf{K}\phi]$ où C est un contexte non trivial et ϕ ne contient pas d'occurrence de $\mathbf{K}$. Par la remarque ci-dessus, $\theta \models\!\!\mid (\mathbf{K}\phi \wedge C[\top]) \vee (\neg \mathbf{K}\phi \wedge C[\bot])$ et on peut de plus normaliser cette dernière formule par les règles de simplification de $\bot, \top$. Soenit $\mathbf{K}\phi \wedge \theta_1$ et $\neg \mathbf{K}\phi \wedge \theta_2$ les formules ainsi obtenues: $\theta \models\!\!\mid (\mathbf{K}\phi \wedge \theta_1) \vee (\neg \mathbf{K}\phi \wedge \theta_2)$. $|\neg \mathbf{K}\phi \wedge \theta_2| \leq 1 + |\mathbf{K}\phi| + 1 + |C| - 1 = |\theta| + 1$ et $|\mathbf{K}\phi \wedge \theta_1| \leq |\mathbf{K}\phi| + 1 + |C| - 1 = |\theta|$. Par hypothèse de récurrence, θ_1, θ_2 sont équivalentes à des disjonctions de formules simples $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ et $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_k$ respectivement de tailles inférieures à $2|\theta_1|, 2|\theta_2|$. θ est alors logiquement équivalente à la disjonction des formules $\mathbf{K}\phi \wedge \sigma_1, \ldots, \mathbf{K}\phi \wedge \sigma_k, \neg \mathbf{K}\phi \wedge \sigma'_1, \ldots, \neg \mathbf{K}\phi \wedge \sigma'_k$, qui sont toutes des formules simples, de taille resp. inférieures à $|\mathbf{K}\phi| + 1 + 2|\theta_1| \leq 2|\theta|$, $|\neg \mathbf{K}\phi| + 1 + 2|\theta_2| \leq 2|\theta|$.

$\Gamma \Rightarrow \phi$ n'est pas valide ssi $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ possède un modèle ssi la conjonction de $\neg\phi$ et des formules de Γ possède un modèle. Il suffit donc, pour répondre à la question, de montrer que toute formule satisfaisable possède un modèle de taille linéaire.

D'après ce que nous venons de voir, toute formule θ est logiquement équivalente à une disjonction de formules simples de taille bornée par $2|\theta|$. θ est satisfaisable ssi l'une de ces formules simples est satisfaisable. Il suffit donc de montrer que les formules simples satisfaisables ont des modèles de taille linéaire.

Supposons que $\omega = \phi \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \mathbf{K}\psi_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} \neg \mathbf{K}\theta_j$ est satisfaisable ($\delta_0 \models_{\mathcal{S}_0} \omega$) et construisons un modèle $\mathcal{S}_1$ de cardinal $1 + m$: $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_m\}$ dans lequel tous les α_i sont équivalents.

- $I(\delta_0) \models \phi \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i$ puisque $\omega \models \phi \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i$ et $\phi \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i$ ne contient pas $\mathbf{K}$. On choisit $I(\alpha_0) = I(\delta_0)$.

- Pour tout $j \geq 1$, il existe $\delta_j =_{\mathcal{S}_0} \delta_0$ tel que $\delta_j \models_{\mathcal{S}_0} \neg\theta_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i$. On choisit alors $I(\alpha_j) = I(\delta_j)$.

$\alpha_0 \models_{\mathcal{S}_1} \omega$: $\alpha_0 \models_{\mathcal{S}_0} \phi$ par construction. Pour tout j, $\alpha_j \models_{\mathcal{S}_1} \psi_j$ par construction, donc $\alpha_0 \models_{\mathcal{S}_1} \mathbf{K}\psi_j$. Enfin, $\alpha_j \not\models_{\mathcal{S}_1} \theta_j$ donc $\alpha_0 \models_{\mathcal{S}_1} \neg\, \mathbf{K}\theta_j$.

4. Il suffit de montrer que la satisfaisabilité d'une formule est dans NP (la NP-difficulté résulte de la NP-difficulté en calcul propositionnel). Si θ est une formule, on commence par choisir de façon non déterministe un sous-ensemble des sous-formules de θ dont le symbole de tête est $\mathbf{K}$, c'est -à dire: on choisit de manière non déterministe l'une des formules simples de la forme normale de la question précédente. θ est satisfaisable ssi l'une de ces formules simples est satisfaisables. De plus, une fois choisi le sous-ensemble de sous-formules de θ de symbole de tête $\mathbf{K}$, le calcul de cette formule simple s'effectue en temps linéaire.

   Il suffit donc de montrer que la satisfaisabilité des formules simples est dans NP.

   Pour cela, on utilise la question précédente: on choisit de façon non-déterministe, $m+1$ interprétations des variables propositionnelles (où m est le nombre d'occurrences de $\neg\, \mathbf{K}$ dans la formule) et on vérifie ensuite (en temps polynomial) que la structure obtenue en considérant la structure dans laquelle toutes les interprétations sont équivalentes, satisfait la formule.