Notes de cours
Cours de logique et calculabilité
première anné ENS Cachan

Hubert Comon-Lundh
comon@lsv.ens-cachan.fr

7 février 2019

$$\text{Résolution binaire} \quad \frac{\neg A \vee C \quad A \vee C'}{C \vee C'}$$

$$\text{Factorisation binaire} \quad \frac{L \vee L \vee C}{L \vee C}$$

FIGURE 2.3 – Règle de résolution

2.4 Résolution

Dans cette partie, on ne considère que des formes clausales.

Décider de la satisfaisabilité d'une formule en forme clausale n'est pas (algorithmiquement) facile. C'est un problème NP-complet (voir calculabilité).

Les règles d'inférence de la figure 2.3 ont en prémisse une ou deux clauses et en conclusion une clause. Dans ces règles, C est ou bien une disjonction de littéraux, ou bien la clause vide $\perp$ (on suppose que $C \vee \perp = C$) et L est un littéral.

On note $E \vdash_R C$ lorsque la clause C peut être obtenue à partir de E. par une application d'un nombre quelconque de règles de la figure 2.3. De manière équivalente, $E \vdash C$ s'il existe un arbre dont les noeuds sont étiquetés par des clauses, la racine est étiquetée par C, les étiquettes des feuilles sont dans E et, chaque noeud qui n'est pas une feuille

— ou bien a un seul fils et, dans ce cas, son étiquette est obtenue par factorisation à partir de l'étiquette de son fils
— ou bien a deux fils et, dans ce cas, son étiquette est obtenue par résolution binaire à partir des étiquettes de ses deux fils.

La *taille* d'une preuve est le nombre de noeuds de l'arbre correspondant.

Exemple 2.4.1 Si $E = \{P \vee \neg Q \vee R, P \vee \neg R\}$ alors $E \vdash_R P \vee \neg Q$ et voici un arbre de preuve :

$$\cfrac{\cfrac{P \vee \neg Q \vee R \quad P \vee \neg R}{P \vee P \vee \neg Q}\, R}{P \vee \neg Q}\, F$$

Exercice 23 (2)
Montrer comment les règles de la figure 2.3 permettent de dériver la clause vide $\perp$ de l'ensemble de clauses

$$E = \{P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q, P \vee Q, \neg P \vee Q\}$$

Exercice 24 (2)
Montrer qu'une même clause peut avoir plusieurs arbres de preuve distincts (à permutation près des fils).

Proposition 2.4.1 *Les règles de la figure 2.3 sont correctes. ($\vdash_R \subseteq \models$).*

Preuve:
Il suffit de montrer que, pour chacune des deux règles, lorsqu'une interprétation satisfait les prémisses, elle satisfait aussi la conclusion, puis de faire une récurrence sur la longueur de la preuve (taille de l'arbre de preuve). Les détails sont laissés en exercice. □

Pour démontrer le théorème qui suit, on utilisera les *arbres sémantiques* que nous définissons maintenant formellement (après les avoir utilisés dans la preuve du théorème 2.2.1).

On suppose, ainsi que dans toute la suite, que l'ensemble des variables propositionnelles est dénombrable : $\mathcal{P} = \{P_i, i \in \mathbb{N}\}$. Une *interprétation partielle* est une application de $\{P_1, \ldots, P_n\}$ dans $\{0,1\}$. $\{P_1, \ldots, P_n\}$ est alors le domaine de l'interprétation partielle. Les interprétations partielles sont ordonnées par prolongement : $I \leq J$ si $Dom(I) \subseteq Dom(J)$ et $\forall x \in Dom(I), I(x) = J(x)$. Si $Dom(I) \neq \mathcal{P}$, il existe exactement deux interprétations partielles I_0 et I_1 telles que $I_0, I_1 > I$ et $\forall J, J > I \Rightarrow J \geq I_0$ ou $J \geq I_1$. I_0 et I_1 sont les *successeurs* de I. Si $Dom(I) = \{P_1, \ldots, P_n\}$, I_0 est l'interprétation qui prolonge I par $I_0(P_{n+1}) = 0$. C'est le *fils droit* de I. I_1 prolonge I par $I_1(P_{n+1}) = 1$. C'est le *fils gauche* de I.

Une interprétation partielle I *falsifie* une clause C si toutes les variables propositionnelles de C sont dans le domaine de I et $I \not\models C$.

Si E est un ensemble de clauses, l'*arbre sémantique* $A(E)$ est défini comme suit. On confond les chemins finis de l'arbre, les noeuds de l'arbre et les interprétations partielles qui correspondent. On précise ci-dessous la correspondance.

- La racine correspond au chemin vide, c'est à dire à l'interprétation de domaine vide.
- Si N est un noeud de l'arbre correspondant à l'interprétation I de domaine $\{P_1, \ldots, P_n\}$,
  - Ou bien il existe une clause $C \in E$ telle que I falsifie C et N est un *noeud d'échec*. C'est alors une feuille de l'arbre et on l'étiquette par une clause de E falsifiée par I
  - Ou bien on n'est pas dans le premier cas et I est une interprétation totale sur $Var(t)$. Dans ce cas N est une feuille de l'arbre. C'est un *noeud de succès*.
  - Dans les autres cas, N a deux fils qui correspondent aux deux successeurs de I.

Exemple 2.4.2 Soit $E = \{P_1, \neg P_2 \vee \neg P_1, P_3 \vee \neg P_1\}$. L'arbre sémantique de E est représenté dans la figure 2.4. L'arbre comporte un noeud de succès (et un seul) qui correspond à la seule interprétation qui satisfait E.

Lemme 2.4.1 *Si E est un ensemble de clauses, alors E est satisfaisable si et seulement si ou bien $A(E)$ contient un noeud de succès, ou bien $A(E)$ contient un chemin infini.*

Preuve:

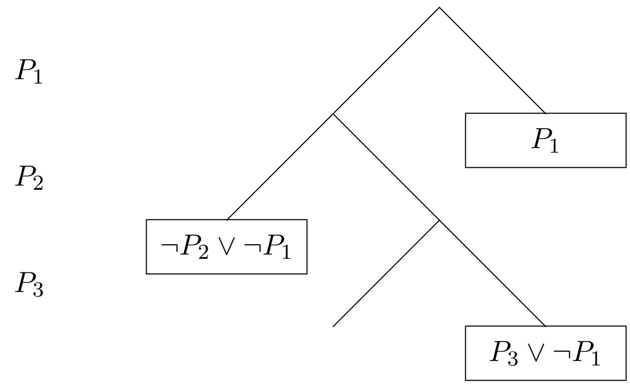

FIGURE 2.4 – Arbre sémantique de l'ensemble E de l'exemple 2.4.2

Si E est satisfaisable, alors l'interprétation I qui satisfait E définit ou bien un chemin conduisant à un noeud de succès (cas où $\mathcal{P}$ est fini) ou bien un chemin infini de $A(E)$ (cas où $\mathcal{P}$ est infini).

Réciproquement, si $A(E)$ contien un noeud de succès, alors l'interprétation I qui lui correspond est totale et ne falsifie aucune clause de E et donc $I \models E$. Si $A(E)$ contient un chemin infini, il existe une suite infinie d'interprétations partielles I_n (les noeuds de ce chemin) telles que $Dom(I_n) = \{P_1, \ldots, P_n\}$, $I_n < I_{n+1}$ et, pour tout n, I_n ne falsifie aucune clause de E. On définit alors I par $I(P_i) = I_i(P_i)$ pour tout i. Pour toute clause $C \in E$, si n_C est l'indice maximal d'une variable propositionnelle de C, $I_{n_C} \models C$ par construction, et, puisque I_{n_C} prolonge I_k pour $k \leq n_C$, I et I_C coïncident sur le domaine de I_{n_C}. Il en résulte que $I \models C$. $\square$

Exercice 25 (2)
Construire l'arbre sémantique associé à $E = \{\neg P_2, P_1 \vee P_2 \vee P_3, P_1 \vee \neg P_3, \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3, \neg P_1 \vee P_3\}$ E est-il satisfaisable ? Pourquoi ?

Théorème 2.4.1 (Complétude réfutationnelle) *Un ensemble de clauses E est insatisfaisable si et seulement si $E \vdash_R \bot$.*

Preuve:
Si $E \vdash_R \bot$, alors E est insatisfaisable par le résultat de correction.

Supposons maintenant que E est insatisfaisable et montrons que $E \vdash_R \bot$.

Soit E^* l'ensemble des clauses C telles que $E \vdash_R C$. Comme $E \subseteq E^*$ est insatisfaisable, il en est de même pour E^*. Donc, d'après le lemme 2.4.1, $A(E^*)$ ne contient ni noeud de succès, ni chemin infini. Raisonnons alors par l'absurde et supposons que $A(E^*)$ n'est pas réduit à la racine. Soit alors N un noeud maximal ayant deux fils. Ces deux fils sont des feuilles, par maximalité, donc des noeuds d'échec. Soit I l'interprétation correspondant à N et I_0, I_1 ses deux successeurs, obtenus en interprétant la variable $P \notin Dom(I)$. Il existe des clauses de E^* qui sont falsifiées respectivement par I_0 et I_1. Soient $C_0, C_1 \in E^*$

de taille minimale qui sont falsifiées respectivement par I_0 et I_1. Comme I ne falsifie ni C_0 ni C_1, $C_0 = P \vee C'_0$ et $C_1 = \neg P \vee C'_1$. De plus si $C'_0 = P \vee C''_0$, alors, par factorisation, $C_0 \vdash_R P \vee C''_0$ et I_0 falsifie $P \vee C''_0$, ce qui contredit la minimalité de C_0. De plus C'_0 ne peut s'écrire $\neg P \vee C'''_0$, car I_0 falsifie C_0. Il en résulte que $Var(C'_0) \subseteq Dom(I)$. De même, $Var(C'_1) \subseteq Dom(I)$. Par résolution, $C_0, C_1 \vdash_R C'_0 \vee C'_1$, donc $C'_0 \vee C'_1 \in E^*$. De plus I_0 falsifie C'_0, donc I falsifie C'_0 et, de même, I_1 falsifie C'_1, donc I falsifie C'_1. Il en résulte que I falsifie $C'_0 \vee C'_1$ et donc que N est un noeud d'échec. Absurde.

On en conclut que l'arbre sémantique de E^* est réduit à la racine : la racine est un noeud d'échec, ce qui ne peut se produire que si $\bot \in E^*$, c'est à dire $E \vdash_R \bot$. □

Le résultat suivant montre que l'on peut obtenir le théorème de compacité comme corollaire au théorème de complétude.

Corollaire 2.4.1 *Si E est un ensemble de clauses insatisfaisables, alors E contient un sous-ensemble fini de clauses insatisfaisable.*

<u>Preuve:</u>
Si E est insatisfaisable, alors $E \vdash_R \bot$. Or la preuve correspondante est un arbre fini. Si E_0 est le sous-ensemble des clauses qui étiquettent des feuilles de l'arbre, $E_0 \subseteq E$, E_0 est fini et E_0 est insatisfaisable. □

La *longueur* d'une preuve est le nombre de sous-arbres distincts dans cette preuve.

Une preuve Π est *sans boucle* si, pour toute clause C, tout sous-arbre de Π dont la racine est étiquetée par C ne contient pas lui-même de sous-arbre propre dont la racine est étiquetée par C.

Exercice 26 (6)
Soit $\mathcal{P}$ un ensemble fini de variables propositionnelles, de cardinal n. On appelle 2-clause toute clause contenant au plus deux littéraux.

1. Montrer que, si E est ensemble de 2-clauses insatisfaisable, toute preuve sans boucle de $\bot$ est de longueur polynômiale en n
2. Montrer par contre que la taille peut être exponentielle : donner un exemple d'ensemble de 2-clauses E tel que E est insatisfaisable et une preuve sans boucle de $\bot$ à partir de E dont la taille est exponentielle en n.
3. Donner un algorithme polynômial en n pour décider de la satisfaisabilité d'un ensemble de 2-clauses

Exercice 27 (6)
Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de variables propositionnelles fini. Donner un ensemble de clauses E qui est insatisfaisable et tel qu'il existe une preuve de $\bot$ de taille exponentielle en $|E|$ et ne contenant aucune redondance (i.e. deux noeuds distincts de l'arbre de preuve qui ne sont pas des feuilles sont étiquetés par des formules distinctes).

$$\text{TE} \quad \frac{}{P \vee \neg P}$$

$$\text{A} \quad \frac{C}{C \vee L}$$

FIGURE 2.5 – Tiers exclu et affaiblissement

En fait, on peut généraliser ce résultat (mais il n'est pas demandé de le montrer) : il existe des ensembles de clauses insatisfaisables dont *aucune* preuve de contradiction n'est de taille polynômiale.

On considère maintenant, en plus des règles d'inférence de la figure 2.3, les deux règles d'inférence de la figure 2.5. Dans ces règles, C est une clause quelconque, L est un littéral quelconque et P est une variable propositionnelle quelconque. On note $\vdash$ la relation de déduction associée.

Théorème 2.4.2 (Complétude) *Si E est un ensemble de clauses et C est une clause. Alors $E \models C$, si et seulement si $E \vdash C$. (Autrement dit $\models = \vdash$).*

Preuve:
La correction des règles d'inférence de la figure 2.5 est une vérification de routine. Il en résulte, par récurrence sur la longueur de la preuve que $E \vdash C$ entraine $E \models C$.

Réciproquement, montrons, par récurrence sur la longueur de la preuve par résolution que, pour tout ensemble de clauses E, tous littéraux $L_1, \ldots, L_k$ et toute clause C,

$$E, L_1, \ldots, L_k \vdash C$$

entraine

$$E \vdash C \vee \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k}$$

- Si la preuve ne contient aucune application de règle d'inférence : ou bien il existe un i tel que $C = L_i$ ou bien $C \in E$. dans le premier cas, par la règle du tiers exclu $\vdash L_i \vee \overline{L_i}$, puis, par affaiblissements, $\vdash L_i \vee \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k}$. Dans le deuxième cas, $E \vdash C$ et, par affaiblissements, $E \vdash C \vee \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k}$.
- Sinon, au moins une règle d'inférence est appliquée. Considérons la dernière règle appliquée dans la preuve.
  - Si c'est le tiers exclu, $E, L_1, \ldots, L_k \vdash P \vee \neg P$, et on obtient une preuve de $E \vdash \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k} \vee P \vee \neg P$:

$$\dfrac{\dfrac{}{P \vee \neg P}\,TE}{\overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k} \vee P \vee \neg P}\,Aff$$

  - Si c'est un affaiblissement : $E, L_1, \ldots, L_k \vdash C_1$ et $C = C_1 \vee L$. Par hypothèse de récurrence, $E \vdash C_1 \vee \overline{L_1} \ldots \vee \overline{L_k}$. Par affaiblissement, $E \vdash C_1 \vee \overline{L_1} \ldots \vee \overline{L_k} \vee L$.

- Si c'est une factorisation : $C = L \vee C_1$ et $E, L_1, \ldots, L_k \vdash L \vee L \vee C_1$. Par hypothèse de récurrence,

$$E \vdash L \vee L \vee C_1 \vee \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k}$$

et, par factorisation,

$$L \vee L \vee C_1 \vee \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k} \vdash C \vee \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k}.$$

- Si c'est une résolution : $C = C_1 \vee C_2$ et $E, L_1, \ldots, L_k \vdash C_1 \vee P$, $E, L_1, \ldots, L_k \vdash C_2 \vee \neg P$. Par hypothèse de récurrence (appliquée deux fois) :

$$E \vdash C_1 \vee P \vee \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k}$$

et

$$E \vdash C_2 \vee \neg P \vee \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k}$$

Par résolution, on obtient alors

$$E \vdash C_1 \vee C_2 \vee \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k} \vee \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k}$$

puis, par factorisations, $E \vdash C \vee \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k}$.

On applique maintenant ce résultat avec $C = \perp$: pour une clause $C_0 = \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k}$ arbitraire, $E, L_1, \ldots, L_k \vdash \perp$ entraine $E \vdash C_0$.

Si maintenant $E \models C_0$, alors $E, L_1, \ldots, L_k$ est insatisfaisable et, par le théorème 2.4.1, $E, L_1, \ldots, L_k \vdash_R \perp$ et donc $E, L_1, \ldots, L_k \vdash \perp$.

D'après ce que nous venons de voir, cela entraine $E \vdash C_0$. □

Exercice 28 (3)

On considère ici un raffinement de la résolution. On définit un ordre sur les littéraux de la manière suivante : $L > L'$ si la variable propositionnelle de L a un indice strictement plus grand que la variable propositionnelle de L'. (autrement dit, on étend l'ordre sur les variables propositionnelles aux littéraux). On restreint alors l'application de la résolution binaire

$$\frac{P \vee C \qquad \neg P \vee C'}{C \vee C'}$$

au cas où P est un littéral maximal de $P \vee C$ et $\neg P$ est un littéral maximal de $\neg P \vee C'$. De même, la règle de factorisation

$$\frac{L \vee L \vee C}{L \vee C}$$

est restreinte au cas où L est maximal dans $L \vee C$.

Montrer qu'avec ces restrictions, l'ensemble de règles d'inférence est encore réfutationnellement complet.

Exercice 29 (3)
On considère le système d'inférence constitué de l'unique règle :

$$\frac{P \vee P \ldots \vee P \vee C \qquad \neg P \vee \ldots \vee \neg P \vee C'}{C \vee C'}$$

Montrer que cette règle est (à elle seule) réfutationellement complète.

Exercice 30 (3)
On dira qu'une clause C *subsume* une clause C' si $C \models C'$.

On considère la stratégie de résolution+factorisation suivante : on n'applique une règle d'inférence que lorsqu'aucune des prémisses n'est subsumée par une clause différente ancêtre dans l'arbre de preuve.

Montrer que cette stratégie est réfutationnellement complète.

Definition 2.4.1 *On appelle* clause de Horn *une clause qui contient au plus un littéral positif.*

Exercice 31 (6)
On considère ici un autre raffinement de la résolution : la règle de résolution est restreinte au cas où l'une des prémisse au moins est dans E (l'ensemble de clauses initial). Cette stratégie est dite *input*.

1. Montrer que cette stratégie n'est pas réfutationnellement complète en général.
2. Montrer qu'elle est réfutationnellement complète lorsque E est un ensemble de clauses de Horn

Exercice 32 (5)
Donner un algorithme polynômial qui permet, étant donné un ensemble fini de clauses de Horn, de dire s'il est satisfaisable ou non.

Exercice 33 (6)
Une clause est *négative* si elle ne contient que des littéraux négatifs. On se propose d'étudier la stratégie suivante de résolution, appelée *stratégie négative* : l'application de la règle de résolution est restreinte au cas où l'une des prémisse est négative. On notera $\vdash_\neg$ la relation de déduction associée.

1. Soit E un ensemble de clauses tel que toute clause de E contient au moins un littéral positif. Montrer que E est satisfaisable.
2. Soit $E = \{\neg P \vee Q, P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q\}$. Montrer que $E \vdash_\neg \bot$ (exhiber une preuve).
3. Si I, J sont des interprétations partielles, on note $I >_{lex} J$ lorsqu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que
   (a) pour tout $j < k$, P_j est dans le domaine de I et dans le domaine de J et $I(P_j) = J(P_j)$
   (b) P_k est dans le domaine de I et dans le domaine de J et $I(P_k) = 1$ et $J(P_k) = 0$.

On note aussi $I \leq J$ l'ordre de prolongement des interprétations partielles.

Montrer que $\geq_{lex}$ est un ordre sur les interprétations partielles et que, pour toutes interprétations partielles, $I \leq J$ ou $J \leq I$ ou $I \leq_{lex} J$ ou $J \leq_{lex} I$

4. Soit A l'arbre sémantique d'un ensemble E de clauses. On suppose que A est fini, non vide et que toutes ses feuilles sont des noeuds d'échec. Montrer qu'il existe une unique interprétation partielle maximale pour $\geq_{lex}$ qui soit un noeud d'échec et ne falsifie aucune clause négative de E.
5. Montrer la complétude réfutationnelle de $\vdash_{\neg}$ par la méthode des arbres sémantiques

2.5 Stratégies de sélection

Une *fonction de sélection* est une application qui associe à toute clause $L_1 \vee \cdots \vee L_n$ (où $n \geq 1$) l'un des littéraux L_i. Étant donnée une fonction de sélection f, on considère la restriction suivante de la résolution :

$$(R_f) \qquad \frac{P \vee C \quad \neg P \vee C'}{C \vee C'} \qquad \text{Si } f(P \vee C) = P \ ET \ f(\neg P \vee C') = \neg P$$

La règle de factorisation binaire et la règle R_f définissent une relation de déduction $\vdash_f$ pour le calcul propositionnel en forme clausale.

Exercice 34 (5)

1. Montrer que $F + R_f$ n'est pas réfutationnellement complète : donner un exemple de fonction de sélection f et d'un ensemble de clauses $\mathcal{E}$ insatisfaisable tel que $\mathcal{E} \not\vdash_f \perp$.
2. Qu'en est il si on suppose que la fonction de sélection sélectionne toujours un littéral négatif quand c'est possible ?

Une clause *de Horn* est une clause contenant au plus un littéral positif.

Théorème 2.5.1 *Pour toute fonction de sélection f, R_f est réfutationellement compète pour les clauses de Horn.*

Exercice 35 (7)
Montrer le théorème ci-dessus, d'abord dans le cas où f sélectionne toujours un littéral négatif quand il y en a au moins un, puis dans le cas général.

Exercice 36 (3)
Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de clauses insatisfaisable quelconque (pas nécessairement des clauses de Horn). Montrer qu'il existe une fonction de sélection telle que la résolution binaire avec stratégie de sélection + factorisation binaire permet de déduire la clause vide de $\mathcal{E}$.

Exercice 37
Soit $\mathcal{P}$ un ensemble dénombrable de variables propositionnelles. On notera $\sqsubseteq$ la relation sur les clauses définie par $C \sqsubseteq C'$ si $C \models C'$.

Soit $\geq$ un ordre total bien fondé sur les *littéraux*. On considère la restriction suivante de la rgle de résolution :

$$\frac{C \vee P \quad \neg P \vee C'}{C \vee C'} \qquad \text{Si } P \text{ est maximal dans } C \vee P \text{ ET } \neg P \text{ est maximal dans } \neg P \vee C'$$

Noter qu'il s'agit d'une généralisation de la résolution avec stratégie ordonnée puisqu'on peut avoir $P \geq Q \geq \neg P$ par exemple.

Si $\mathcal{E}$ est un ensemble de clauses, on note $\mathcal{E}^*$ l'ensemble des conséquences de $\mathcal{E}$ par factorisation et résolution suivant la stratégie $\mathcal{S}$ ci-dessus.

1. Montrer que $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre bien fondée sur l'ensemble des clauses.

2. Montrer que la stratégie négative est un cas particulier de la stratégie ci-dessus (rappel : la stratégie négative consiste à ne faire de résolution que sur des clauses dont l'une des prémisses ne contient que des littéraux négatifs).
3. La stratégie *unitaire* consiste à restreindre la règle de résolution au cas où l'une des prémisses est réduite à un littéral.

   Si $\mathcal{E}$ est un ensemble de clauses, soit $\mathcal{E}_U$ l'ensemble des clauses que l'on peut déduire de $\mathcal{E}^*$ par la stratégie unitaire et $\mathcal{E}_S$ l'ensemble des clauses minimales de $\mathcal{E}_U$ pour l'ordre $\sqsubseteq$.

   Montrer que, si $\mathcal{E}^*$ ne contient pas $\perp$, alors $\mathcal{E}_S$ ne contient pas $\perp$ et $\mathcal{E}_S^* = \mathcal{E}_S$.
4. Montrer que, si $\mathcal{E}^*$ ne contient ni $\perp$ ni clause unitaire, et L est un littéral minimal de $\mathcal{E}*$, alors $(\mathcal{E}^* \cup \{\overline{L}\})^* = \mathcal{E}^* \cup \{\overline{L}\}$.
5. Montrer que la stratégie $\mathcal{S}$ est réfutationellement complète.

Exercice 38 (5)

$\mathcal{L}$ est un ensemble fini d'entiers, appelés étiquettes. Un *littéral étiqueté* est une paire d'un littéral et d'un élément de $\mathcal{L}$, noté L et e. Une *clause étiquetée* est une disjonction de littéraux étiquetés. Comme d'habitude, la disjonction vide est notée $\perp$. La sémantique d'une clause étiquetée est la même que celle de la clause à laquelle on a retiré les étiquettes. Une *fonction de sélection* s est une application qui associe à toute clause étiquetée un sous-ensemble des littéraux de c. Dans cette partie, on considère les deux règles d'inférence suivantes :

$$R \qquad \frac{L \text{ et } e \vee C \quad \overline{L} \text{ et } e' \vee C'}{C \vee C'} \qquad \texttt{Si} \begin{cases} L \text{ et } e \in s(L \text{ et } e \vee C) \\ \overline{L} \text{ et } e' \in s(\overline{L} \text{ et } e' \vee C') \end{cases}$$

$$F \qquad \frac{L \text{ et } e \vee L \text{ et } e' \vee C}{L \text{ et } e \vee C} \qquad \texttt{Si} L \text{ et } e' \in s(L \text{ et } e \vee L \text{ et } e' \vee C)$$

Soit C un ensemble de clauses. On affecte à chaque formule littéral de chaque clause de C une étiquette dans un ensemble fini (on peut affecter des étiquettes différentes à un même littéral apparaissant dans deux clauses différentes). C est ainsi considéré comme un ensemble de clauses étiquetées. Soit $\geq$ un ordre sur les littéraux étiquetés. On considère la fonction de sélection suivante : $s(c)$ est l'ensemble des littéraux L et e tels que L et e est maximal dans c. On note S_e cette stratégie (paramétrée par $\geq$ et l'étiquetage).

On suppose d'abord que $\geq$ est un ordre total bien fondé. À une clause $C = L_1$ et $a_1 \vee \cdots \vee L_n$ et a_n on associe le multi-ensemble des littéraux étiquetés $m(C) = \{L_1$ et $a_1, \ldots, L_n$ et $a_n\}$. Les clauses sont ainsi ordonnées par l'extension multi-ensemble de $\geq$. Si $\mathcal{S}$ est un ensemble de clauses et L et a est un littéral étiqueté, on note $\mathcal{S}(L)$ l'ensemble des clauses C ne contenant aucun littéral L et b et telles que $C \in \mathcal{S}$ ou bien $C \vee \overline{L}$ et $b \in \mathcal{S}$ pour au moins un b. (Autrement dit, on remplace L par $\top$ dans les clauses de $\mathcal{S}$ et on simplifie). Si $\mathcal{E}$ est un ensemble de clauses, on note de plus $\mathcal{E}^*$ l'ensemble des clauses déductibles de $\mathcal{E}$ par la stratégie S_e. Montrer que, si $\perp \notin \mathcal{E}^*$, C est une clause minimale de $\mathcal{E}^*$ et L est un littéral maximal de C, alors $\perp \notin (\mathcal{E}^*(L))^*$. Montrer la complétude réfutationnelle de la stratégie S_e sur les clauses étiquetées.

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}\,(Ax) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \psi \vdash \phi}\,(Aff) \qquad \frac{\Gamma, \neg\phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\,(Abs)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}\,(\wedge I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi}\,(\wedge E_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\,(\wedge E_2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\,(\vee I_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\,(\vee I_2) \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta}\,(\vee E)$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\phi}\,(\neg I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\phi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \bot}\,(\neg E)$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \to \psi}\,(\to I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \to \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\,(\to E)$$

FIGURE 2.6 – Règles d'inférence de la déduction naturelle propositionnelle classique $\mathbf{NK}_0$

2.6 Déduction naturelle

2.6.1 Syntaxe

Les énoncés en déduction naturelle, appelés *jugements* sont des expressions $\Gamma \vdash \phi$ où Γ est un ensemble fini de formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ et ϕ est une formule de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$. Il faut comprendre de tels jugements comme "De l'ensemble d'hypothèses Γ on peut déduire ϕ". Inclure les hypothèses dans le jugement permet par exemple d' énoncer de manière naturelle (et formelle) que, si l'on veut prouver $\phi \to \psi$, sous les hypothèses Γ, il suffit de montrer ψ sous les hypothèses Γ, ϕ.

2.6.2 Sémantique (classique)

Si I est une interprétation des variables propositionnelles, $I \models \Gamma \vdash \phi$ si, ou bien il existe une formule $\psi \in \Gamma$ telle que $I \not\models \psi$, ou bien $I \models \phi$.

2.6.3 Déduction naturelle classique

Les règles d'inférence de la déduction naturelle classique propositionnelle, appelée $\mathbf{NK}_0$ sont données dans la figure 2.6.

Proposition 2.6.1 *Tout jugement prouvable dans $\boldsymbol{NK}_0$ est valide.*

Exemple 2.6.1 On peut prouver par exemple la double négation dans $\mathbf{NK}_0$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\phi, \neg\phi \vdash \neg\neg\phi}\,(Ax) \qquad \dfrac{}{\neg\neg\phi, \neg\phi \vdash \neg\neg\phi}\,(Ax)}{\neg\neg\phi, \neg\phi \vdash \bot}\,(\neg E)}{\neg\neg\phi \vdash \phi}\,(Abs)$$

Exercice 39 (5)
Montrer comment dériver le tiers exclu $\vdash P \vee \neg P$ dans $\mathbf{NK}_0$.

Lemme 2.6.1 *Si $\Gamma, \phi \vdash \psi$ et $\Gamma \vdash \phi$ sont prouvables dans $\boldsymbol{NK}_0$, alors $\Gamma \vdash \psi$ est prouvable.*

<u>Preuve:</u>

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \to \psi}\,(\to I) \qquad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\,(\to E)$$

$\square$

Lemme 2.6.2 $\neg(\phi \vee \psi) \vdash \neg\phi$ *et* $\neg(\phi \vee \psi) \vdash \neg\psi$ *sont prouvables dans $\boldsymbol{NK}_0$.*

<u>Preuve:</u>

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\phi_1 \vee \phi_2), \phi_2 \vdash \neg(\phi_1 \vee \phi_2)}\,(Ax) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg(\phi_1 \vee \phi_2), \phi_2 \vdash \phi_2}\,(Ax)}{\neg(\phi_1 \vee \phi_2), \phi_2 \vdash \phi_1 \vee \phi_2}\,(\vee I_2)}{\neg(\phi_1 \vee \phi_2), \phi_2 \vdash \bot}}{\neg(\phi_1 \vee \phi_2) \vdash \neg\phi_2}\,(\neg I)$$

$\square$

Lemme 2.6.3 *Si* $\Gamma, \phi, \psi \vdash \theta$ *est prouvable, alors* $\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \theta$ *est prouvable.*

Preuve:

$$\frac{\Gamma, \phi, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \phi, \psi, \phi \wedge \psi \vdash \theta}\, Aff$$

et

$$\cfrac{\cfrac{}{\Gamma, \phi, \phi \wedge \psi \vdash \phi \wedge \psi}\, Ax}{\Gamma, \phi, \phi \wedge \psi \vdash \psi}\, \wedge E$$

Donc, d'après le lemme 2.6.1, $\Gamma, \phi, \phi \wedge \psi \vdash \theta$ est prouvable.

$$\cfrac{\cfrac{}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \phi \wedge \psi}}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \phi}\, \wedge E$$

Donc, d'après le lemme 2.6.1 à nouveau, $\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \theta$ est prouvable.

□

Théorème 2.6.1 (Complétude) *Si* Γ *est un ensemble fini de formules et* ϕ *est une formule telles que* $\Gamma \models \phi$, *alors* $\Gamma \vdash \phi$ *est prouvable dans* $\boldsymbol{NK}_0$.

Preuve:
Noter d'abord que $\Gamma \models \phi$ est équivalent à la validité de $\Gamma \vdash \phi$.

On considère la mesure suivante sur les formules : $w(\bot) = 0 = w(P) = w(\neg P)$ si P est une variable propositionnelle, $w(\neg\phi) = 1 + w(\phi)$ si ϕ n'est pas une variable propositionnelle et $w(\phi \vee \psi) = 2 + w(\phi) + w(\psi) = w(\phi \to \psi) = w(\phi \wedge \psi)$. $w(\Gamma \vdash \phi) = w(\phi) + \sum_{\psi \in \Gamma} w(\psi)$. On montre le résultat par récurrence sur $w(\Gamma \vdash \phi)$.

Cas de base $w(\Gamma \vdash \phi) = 0$ lorsque $\phi = \top$, $\phi = \bot$ ou Γ, ϕ ne contiennent que des littéraux.

On distingue 3 cas :

Cas 1 : $\phi = \top$ il suffit d'appliquer la règle correspondante du calcul.

Cas 2 : Γ **est insatisfaisable** (ce qui est le cas lorsque $\phi = \bot$).

— Si $\bot \in \Gamma$, alors $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable pour toute formule ϕ :

$$\cfrac{\cfrac{}{\Gamma, \neg\phi \vdash \bot}\, Ax}{\Gamma \vdash \phi}\, Abs$$

— Sinon, Soit I_Γ l'interprétation qui contient exactelement les variables propositonnelles de Γ. I_Γ doit falsifier une formule de Γ. Comme Γ

ne contient que des littéraux, il existe une variable propositionnelle $P \in I_\Gamma$ telle que $\neg P \in \Gamma$. Dans ce cas, $\Gamma = \Gamma_1, P, \neg P$ et

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma \vdash P}\,Ax \qquad \overline{\Gamma \vdash \neg P}\,Ax}{\Gamma \vdash \perp}\,\neg E}{\Gamma, \neg\phi \vdash \perp}\,Aff}{\Gamma \vdash \phi}\,Abs$$

Cas 3 : Γ est satisfaisable et $\phi \notin \{\top, \perp\}$: Si $\phi \in \mathcal{P}$, soit I_Γ l'interprétation définie par $I_\Gamma = \mathcal{P} \cap \Gamma$. I_Γ satisfait toutes les formules de Γ, puisque Γ ne contient pas une variable propositionnelle et sa négation (Γ serait insatisfaisable). $\Gamma \models \phi$ entraine alors que $I_\Gamma \models \phi$. Il en résulte $\phi \in I_\Gamma$ et donc $\phi \in \Gamma$.

Si $\phi = \neg P$ avec $P \in \mathcal{P}$, soit I l'interprétation définie par $I = \{Q \mid \neg Q \notin \Gamma\}$. Comme Γ ne contient pas une variable propositionnelle et sa négation, I satisfait toutes les formules de Γ. Par conséquent $I \models \phi$. Donc $P \notin I$ et donc $\neg P \in \Gamma$ par construction. Il en résulte que, à nouveau, $\phi \in \Gamma$.

Dans tous les cas $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable par la règle Axiome.

Récurrence Si maintenant $w(\Gamma \vdash \phi) \geq 1$, on distingue plusieurs cas :

1. $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$. Dans ce cas, $\Gamma \models \phi$ entraine $\Gamma \models \phi_1$ et $\Gamma \models \phi_2$ et $w(\Gamma \vdash \phi_1), w(\Gamma \vdash \phi_2) < w(\Gamma \vdash \phi)$. Donc, par hypothèse de récurrence, $\Gamma \vdash \phi_1$ et $\Gamma \vdash \phi_2$ sont dérivables dans $\mathbf{NK}_0$ (soient π_1, π_2 leurs preuves). On conclut alors en construisant la preuve

$$\pi = \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ \Gamma \vdash \phi_1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2 \\ \Gamma \vdash \phi_2\end{matrix}}{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \pi_2}\,(\wedge I)$$

2. $\phi = \neg\phi_1$ et $\phi_1 \notin \mathcal{P}$. Dans ce cas, $\Gamma \models \phi$ entraine $\Gamma, \phi_1 \models \perp$ et $w(\Gamma \vdash \phi) = 1 + w(\gamma, \phi_1 \vdash \perp)$. Par hypothèse de récurrence, il existe une preuve π_1 de $\Gamma, \phi_1 \vdash \perp$ dans $\mathbf{NK}_0$. On construit alors comme suit une preuve de $\Gamma \vdash \phi$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ \Gamma, \phi_1 \vdash \perp\end{matrix}}{\Gamma \vdash \neg\phi_1}\,(\neg I)$$

3. $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$. Dans ce cas, $\Gamma \models \phi$ entraine $\Gamma, \neg\phi_1 \models \phi_2$ et $w(\Gamma, \neg\phi_1 \vdash \phi_2) = w(\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2) - 1$. Par hypothèse de récurrence, il existe donc une preuve π_0 de $\Gamma, \neg\phi_1 \vdash \phi_2$. On construit alors comme suit une preuve de $\Gamma \vdash \phi$: par le lemme 2.6.2, il existe une preuve π_2 de $\Gamma, \neg(\phi_1 \vee \phi_2) \vdash \neg\phi_2$ et une preuve π_1 de $\Gamma, \neg(\phi_1 \vee \phi_2) \vdash \neg\phi_1$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_2}{\Gamma, \neg(\phi_1 \vee \phi_2) \vdash \neg\phi_2} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_0}{\Gamma, \neg\phi_1 \vdash \phi_2}}{\Gamma, \neg(\phi_1 \vee \phi_2), \neg\phi_1 \vdash \phi_2}\,(Aff)}{\Gamma, \neg(\phi_1 \vee \phi_2) \vdash (\neg\phi_1) \rightarrow \phi_2}\,(\rightarrow I) \quad \dfrac{\pi_1}{\Gamma, \neg(\phi_1 \vee \phi_2) \vdash \neg\phi_1}}{\Gamma, \neg(\phi_1 \vee \phi_2) \vdash \phi_2}\,(\rightarrow E)}{\Gamma, \neg(\phi_1 \vee \phi_2) \vdash \perp}\,(\neg E)}{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2}\,(abs)$$

4. $\phi = \phi_1 \rightarrow \phi_2$. Dans ce cas, $\Gamma \models \phi$ entraine $\Gamma, \phi_1 \models \phi_2$ et $w(\Gamma \vdash \phi_1 \rightarrow \phi_2) = 2 + w(\Gamma, \phi_1 \vdash \phi_2)$. Par hypothèse de récurrence, il existe donc une preuve π_1 de $\Gamma, \phi_1 \vdash \phi_2$. On construit alors la preuve π comme suit :

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma, \phi_1 \vdash \phi_2}}{\Gamma \vdash \phi_1 \rightarrow \phi_2}\,(\rightarrow I)$$

5. $\Gamma = \Gamma_1, \psi_1 \wedge \psi_2$. Dans ce cas $\Gamma \models \phi$ entraine que $\Gamma_1, \psi_1, \psi_2 \models \phi$. Or $w(\Gamma \vdash \phi) = 2 + w(\Gamma_1, \psi_1, \psi_2 \vdash \phi)$. Il existe donc, par hypothèse de récurrence, une preuve π_1 de $\Gamma_1, \psi_1, \psi_2 \vdash \phi$. D'après le lemme 2.6.3, il existe donc une preuve de $\Gamma_1, \psi_1 \wedge \psi_2 \vdash \phi$.
6. $\Gamma = \Gamma_1, \psi_1 \vee \psi_2$. Dans ce cas $\Gamma \models \phi$ entraine que $\Gamma_1, \psi_1 \models \phi$ et $\Gamma_1, \psi_2 \models \phi$. $w(\Gamma_1, \psi_1 \vee \psi_2 \vdash \phi) = 2 + w(\Gamma_1, \psi_1 \vdash \phi) = 2 + w(\Gamma_1, \psi_2 \vdash \phi)$. Par hypothèse de récurrence, il existe donc des preuves π_1, π_2 de $\Gamma_1, \psi_1 \vdash \phi$ et $\Gamma_1, \psi_2 \vdash \phi$ respectivement. On construit alors la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1, \psi_1 \vee \psi_2 \vdash \psi_1 \vee \psi_2}\,(Ax) \quad \dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma_1, \psi_1 \vdash \phi}}{\Gamma_1, \psi_1 \vee \psi_2, \psi_1 \vdash \phi}\,(Aff) \quad \dfrac{\dfrac{\pi_2}{\Gamma_1, \psi_2 \vdash \phi}}{\Gamma_1, \psi_1 \vee \psi_2, \psi_2 \vdash \phi}\,(Aff)}{\Gamma_1, \psi_1 \vee \psi_2 \vdash \phi}\,(\vee E)$$

7. $\Gamma = \Gamma_1, \neg\psi_1$ et ϕ est un littéral et $\psi_1 \notin \mathcal{P}$. Soit $\overline{\phi}$ le littéral complémentaire de ϕ ($\neg\phi$ si $\phi \in \mathcal{P}$ et P si $\phi = \neg P$ avec $P \in \mathcal{P}$).
$\Gamma \models \phi$ entraine $\Gamma_1, \overline{\phi} \models \psi_1$. De plus $w(\Gamma_1, \overline{\phi} \vdash \psi_1) = w(\Gamma \vdash \phi) - 1$ puisque $w(\phi) = w(\overline{\phi}) = 0$. Par hypothèse de récurrence, il existe donc une preuve π_0 de $\Gamma_1, \overline{\phi} \vdash \psi_1$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_0}{\Gamma_1, \overline{\phi} \vdash \psi_1}}{\Gamma_1, \overline{\phi}, \neg\psi_1 \vdash \psi_1}\,Aff \quad \dfrac{}{\Gamma_1, \overline{\phi}, \neg\psi_1 \vdash \neg\psi_1}\,Ax}{\Gamma_1, \overline{\phi}, \neg\psi_1 \vdash \perp}\,\neg E}{\Gamma_1, \neg\psi_1 \vdash \phi}\,R$$

où R est Abs si $\phi \in \mathcal{P}$ et $\neg I$ sinon.

8. $\Gamma = \Gamma_1, \psi_1 \to \psi_2$. Dans ce cas, $\Gamma \models \phi$ entraine que $\Gamma_1, \neg\psi_1 \models \phi$ et $\Gamma_1, \psi_2 \models \phi$. Or $w(\Gamma_1, \psi_1 \to \psi_2 \vdash \phi) = 1 + w(\Gamma_1, \neg\psi_1 \vdash \phi) = 2 + w(\Gamma_1, \psi_2 \vdash \neg\phi)$. Donc, par hypothèse de récurrence, il existe des preuves π_1, π_2 de $\Gamma_1, \neg\psi_1 \vdash \phi$ et $\Gamma_1, \psi_2 \vdash \phi$ respectivement. On construit alors une preuve π_3 de $\Gamma_1, \psi_1 \to \psi_2, \neg\phi \vdash \psi_2$:

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1, \psi_1 \to \psi_2, \neg\phi \vdash \psi_1 \to \psi_2}\,(Ax) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma_1, \neg\psi_1 \vdash \phi}}{\Gamma_1, \psi_1 \to \psi_2, \neg\phi, \neg\psi_1 \vdash \phi}\,(Aff) \qquad \dfrac{}{\Gamma_1, \psi_1 \to \psi_2, \neg\phi, \neg\psi_1 \vdash \neg\phi}\,(Ax)}{\Gamma_1, \psi_1 \to \psi_2, \neg\phi, \neg\psi_2 \vdash \bot}\,(\neg E)}{\Gamma_1, \psi_1 \to \psi_2, \neg\phi \vdash \psi_1}\,(abs)}{\Gamma_1, \psi_2 \to \psi_2, \neg\phi \vdash \psi_2} \to E$$

puis une preuve π_4 de $\Gamma_1, \psi_1 \to \psi_2, \neg\phi \vdash \neg\psi_2$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_2}{\Gamma_1, \psi_2 \vdash \phi}}{\Gamma_1, \psi_2, \psi_1 \to \psi_2, \neg\phi \vdash \phi}\,(Aff) \qquad \dfrac{}{\Gamma_1, \psi_2, \psi_1 \to \psi_2, \neg\phi \vdash \neg\phi}\,(Ax)}{\Gamma_1, \psi_1 \to \psi_2, \neg\phi, \psi_2 \vdash \bot}\,(\neg E)}{\Gamma_1, \psi_1 \to \psi_2, \neg\phi \vdash \neg\psi_2}\,(\neg I)$$

Et enfin, en combinant π_3, π_4 :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_4}{\Gamma_1, \psi_1 \to \psi_2, \neg\phi \vdash \neg\psi_2} \qquad \dfrac{\pi_3}{\Gamma_1, \psi_1 \to \psi_2, \neg\phi \vdash \psi_2}}{\Gamma_1, \psi_1 \to \psi_2, \neg\phi \vdash \bot}\,\neg E}{\Gamma_1, \psi_1 \to \psi_2 \vdash \phi}\,(abs)$$

□

Exercice 40 (5)

1. Montrer que, si l'on retire la règle d'affaiblissement à **NK**, le système de déduction reste complet.
2. Montrer que, si l'on retire les règles d'introduction de $\vee$ à **NK**, le système de déduction n'est plus complet.

Solutions des exercices

Exercice 23:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P \vee \neg Q \quad \neg P \vee Q}{\neg P \vee \neg P}}{\neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{P \vee \neg Q \quad P \vee Q}{P \vee P}}{P}}{\perp}$$

Exercice 24:

Il suffit par exemple de prendre la preuve de l'exercice précédent en échangeant P et Q.

Exercice 26:

1. Il suffit de remarquer que la résolution appliquée à E conduit à une clause contenant au plus deux littéraux. On peut donc inférer au plus $4n^2 + 2n + 1$ clauses distinctes.
2. On prend pour E l'ensemble des clauses

$$\begin{array}{rl} E = & \{P_n \vee P_{n-1}, \neg P_n \vee P_0, P_n \vee P_0, \neg P_n \vee \neg P_{n-1}\} \\ \cup & \{\neg P_0 \vee P_k \mid k < n\} \\ \cup & \{\neg P_0 \vee \neg P_k \mid k < n\} \end{array}$$

On construit alors les preuves π_k^1, π_k^2, π_k^3, π_k^4 de $P_0 \vee P_{n-k}$, $P_0 \vee \neg P_{n-k}$, $P_{n-k} \vee P_{n-k-1}$, $\neg P_{n-k} \vee \neg P_{n-k-1}$ respectivement, par récurrence sur k. pour $k = 0$ ce sont des éléments de E. Sinon :

$$\pi_{k+1}^1 = \quad \dfrac{\pi_k^2 \quad \pi_k^3}{P_{n-k-1} \vee P_0}$$

$$\pi_{k+1}^2 = \quad \dfrac{\pi_k^4 \quad \pi_k^1}{P_0 \vee \neg P_{n-k-1}}$$

$$\pi_{k+1}^3 = \quad \dfrac{\pi_{k+1}^1 \quad \neg P_0 \vee P_{n-k-2}}{P_{n-k-1} \vee P_{n-k-2}}$$

$$\pi_{k+1}^4 = \quad \dfrac{\pi_{k+1}^2 \quad \neg P_0 \vee \neg P_{n-k-2}}{\neg P_{n-k-2} \vee \neg P_{n-k-1}}$$

On montre par récurrence sur k que les preuves π_k^i sont sans boucle. De plus, par récurrence sur k, pour tout k et tout i, $|\pi_k^i| \geq 2^k$.

Enfin, on considère la preuve de contradiction suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P_0 \vee \neg P_1 \quad \neg P_0 \vee P_1}{\neg P_0 \vee \neg P_0}}{\neg P_0} \qquad \dfrac{\dfrac{\pi^1_{n-1} \quad \pi^2_{n-1}}{P_0 \vee P_0}}{P_0}}{\perp}$$

Dont la taille est supérieure à 2^n.

3. L'algorithme consiste à *saturer* E, c'est à dire à calculer le point fixe par résolution et factorisation de E. Initialement, $E_0 = E$ et $E_1 = \emptyset$. Tant que E_0 n'est pas vide :
   — Sélectionner une clause C de E_0
   — Calculer toutes les inférences par résolution ou factorisation de C avec une clause de E_1.
   — Ajouter à E_0 toutes les clauses obtenues qui ne sont ni dans E_0 ni dans E_1
   — retirer C de E_0 et l'ajouter à E_1.

   On montre l'invariant suivant : L'ensemble des clauses déductibles en une étape à partir d'une (ou deux) clauses de E_1 est dans $E_1 \cup E_0$.

   Comme il y a au plus $2n^2 + 2n + 1$ clauses distinctes, on passe au plus $2n^2 + 2n + 1$ fois dans la boucle.

   Enfin, chaque itération requiert au plus $|E_1| + 1$ tentatives d'application d'une règle d'inférence. Comme chaque clause comprent au plus deux littéraux, chaque tentative d'application d'une règle requiert un temps constant.

   On obtient ainsi un algorithme en $O(n^4)$. (NB : on peut faire mieux, par exemple en considérant une stratégie ordonnée).

Exercice 27:

On considère $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n\}$ et

$$\begin{array}{rcl} E = & & \{\neg P_k \vee Q_{k+1} \mid 1 \leq k \leq n-1\} \\ & \cup & \{\neg P_k \vee \neg Q_{k+1} \mid 1 \leq k \leq n-1\} \\ & \cup & \{P_1 \vee \ldots \vee P_n \vee Q_1, P_1 \vee \ldots \vee P_n \vee \neg Q_1\} \end{array}$$

Montrons que, pour tout $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{+, -\}^n$, $E \vdash_R \epsilon_1 Q_1 \vee \ldots \vee \epsilon_n Q_n$ et que, de plus, il existe une preuve qui ne contient aucun noeud (hors la racine) qui ne contient que des variables Q_i.

On montre en fait par récurrence sur k que $E \vdash_R P_k \vee \ldots \vee P_n \vee \epsilon_1 Q_1 \vee \ldots \vee \epsilon_k Q_k$ avec une preuve dans laquelle tout noeud (hors la racine) contient au moins une variable $P_i, i < k$.

Pour $k = 1$, on obtient le résultat par définition de E.

Supposons le résultat vrai pour k. On considère alors les preuves

$$\frac{P_k \vee \ldots \vee P_n \vee \epsilon_1 Q_1 \vee \ldots \vee \epsilon_k Q_k \quad \neg P_k \vee Q_{k+1}}{P_{k+1} \vee \ldots \vee P_n \vee \epsilon_1 Q_1 \vee \ldots \vee \epsilon_k Q_k \vee Q_{k+1}}$$

$$\frac{P_k \vee \ldots \vee P_n \vee \epsilon_1 Q_1 \vee \ldots \vee \epsilon_k Q_k \quad \neg P_k \vee \neg Q_{k+1}}{P_{k+1} \vee \ldots \vee P_n \vee \epsilon_1 Q_1 \vee \ldots \vee \epsilon_k Q_k \vee \neg Q_{k+1}}$$

qui donnent le résultat pour $k+1$.

Enfin, par récurrence sur n, il existe une preuve de $\perp$ à partir

$$E'_n = \{\epsilon_1 Q_1 \vee \ldots \vee \epsilon_n Q_n \mid \epsilon_i \in \{0,1\}\}$$

telle que les noeuds de l'arbre à profondeur $k \leq n$ sont étiquetés par les éléments de E'_k (si on ne tient pas compte des contractions).

Exercice 28:

En fait, il suffit de reprendre la preuve du théorème 2.4.1, supposant que les littéraux sont énumérés dans l'ordre donné pour construire l'arbre sémantique, et de remarquer que le règles utilisées respectent l'ordre sur les littéraux.

Exercice 29:

Il suffit à nouveau de reprendre la preuve de complétude réfutationnelle de résolution+factorisation et de remarquer qu'on a besoin de cette règle seulement.

Exercice 30:

On montre que, si $E \vdash_R \perp$ et $C_1, C_2 \in E$, C_1 subsume C_2, et $C_1 \neq C_2$, alors $E \setminus \{C_2\} \vdash_R \perp$.

En effet, si E est insatisfaisable, alors $E \setminus \{C_2\}$ est insatisfaisable et donc, par complétude, $E \setminus \{C_2\} \vdash_R \perp$.

Exercice 31:

1. On considère $E = \{P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee Q, \neg P \vee \neg Q\}$. Par la stratégie input, on peut déduire $P, \neg P, Q, \neg Q$. Mais pour déduire une contradiction, il faut en prémisse $\neg P$ et P ou bien $\neg Q$ et Q. Or aucune de ces deux clauses n'est dans E.
2. On remarque d'abord que Résolution en factorisation à partir de clauses de Horn produisent des clauses de Horn.

   Par convention, on supposera que, dans les prémisses d'une résolution

   $$\frac{P \vee C \quad \neg P \vee C'}{C \vee C'}$$

   la prémisse contenant le littéral positif P est à gauche.

On suppose qu'il existe une preuve π de $E \vdash_R C$ et on montre qu'il en existe une preuve π' par la stratégie input. Pour cela on associe à chaque preuve π la paire $(N(\pi), h(\pi))$, où N est la taille de π et h est la taille du fils gauche de π (si la dernière règle est une factorisation, la taille du seul fils de π).

On montre alors le résultat par récurrence sur $(N(\pi), h(\pi))$. Si $N(\pi) = 0$, le résultat est immédiat. Si $h(\pi) = 0$, il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence au fils droit de π.

Soit maintenant $N(\pi) > 0$ et $h(\pi) > 0$.

Si la dernière règle permettant d'obtenir le fils gauche de π est une résolution, on effectue la transformation de preuves suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{C_1 \vee P} \quad \dfrac{\pi_2}{\neg P \vee C_2 \vee Q}}{C_1 \vee C_2 \vee Q} \quad \dfrac{\pi_3}{C_3 \vee \neg Q}}{C_1 \vee C_2 \vee C_3}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{C_1 \vee P} \quad \dfrac{\dfrac{\pi_2}{\neg P \vee C_2 \vee Q} \quad \dfrac{\pi_3}{C_3 \vee \neg Q}}{C_2 \vee C_3 \vee \neg P}}{C_1 \vee C_2 \vee C_3}$$

Où C_1, C_2 sont des clauses ne contenant que des littéraux négatifs et C_3 est une clause de Horn.

La preuve obtenue est plus petite : on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

Si la dernière règle du fils gauche est une factorisation, on applique la règle :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{C_1 \vee \neg P \vee \neg P \vee Q}}{C_1 \vee \neg P \vee Q} \qquad \dfrac{\pi_2}{C_3 \vee \neg Q}}{C_1 \vee C_3 \vee \neg P}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{C_1 \vee \neg P \vee \neg P \vee Q} \qquad \dfrac{\pi_2}{C_3 \vee \neg Q}}{C_1 \vee \neg P \vee \neg P \vee C_3}}{C_1 \vee \neg P \vee C_3}$$

et on applique l'hypothèse de récurrence.

Exercice 33:

1. Il suffit de considérer l'interprétation qui associe 1 à toutes les variables propositionnelles.
2. $$R \ \dfrac{\neg P \vee Q \quad \neg P \vee \neg Q}{F \ \dfrac{\neg P \vee \neg P}{\neg P}}$$

$$R \ \dfrac{P \vee Q \qquad R \ \dfrac{\neg P \vee \neg Q \quad P \vee \neg Q}{F \ \dfrac{\neg Q \vee \neg Q}{\neg Q}}}{P}$$

   et $P, \neg P \vdash_{\neg} \bot$
3. Si $I \geq_{lex} J$ et $J \geq_{lex} I$, alors, supposons que $I \neq J$: il existe un entier $k \geq 1$ tel que I et J coïncident sur les variables propositionnelles d'indice inférieur à k et $I(P_k) = 1$ et $J(P_k) = 0$ et il existe un entier l tel que I et J coïncident sur les variables d'indice inférieur à l et $I(P_l) = 0$ et $J(P_l) = 1$. Par symétrie on peut supposer $k \geq l$, mais I et J différant sur P_k et devant coïncider sur les variables d'indice inférieur à l, on doit avoir $k = l$, ce qui est absurde vu la définition de I sur P_k et P_l. Donc $I = J$ et la relation $\geq_{lex}$ est antisymétrique.

Si $I \geq_{lex} J \geq_{lex} K$. Si $I = J$ ou $J = K$, on a directement $I \geq_{lex} K$. Sinon, il existe k, l tels que I et J coïncident sur les variables d'indice inférieur à k, J et K coïncident sur les variables d'indice inférieur à l et $I(P_k) = 1$, $J(P_k) = 0$, $J(P_l) = 1$, $K(P_l) = 0$. $k \neq l$ vu la définition de J sur P_k. Supposons par exemple que $k < l$ (l'autre cas est semblable) : I et K coïncident sur les variables d'indice inférieur à k, $I(P_k) = 1$ et $K(P_k) = J(P_k) = 0$, donc $I >_{lex} K$. $\geq_{lex}$ est donc transitive. C'est ainsi une relation d'ordre.

Si I et J sont deux interprétations partielles quelconques, soit $k \geq 0$ le plus grand entier tel que I et J coïncident sur les variables d'indice inférieur ou égal à k. Ou bien le domaine de I est $P_1, \ldots, P_k$ et $I \leq J$, ou bien le domaine de J est $P_1, \ldots, P_k$ et $J \leq I$, ou bien I et J sont définies en P_k. Dans ce dernier cas, si $I(P_k) = 1$, par maximalité de k, $J(P_k) = 0$ et $I >_{lex} J$, ou bien $I(P_k) = 0$ et dans ce cas $J >_{lex} I$.

4. Comme A est fini, non vide et que toutes les feuilles sont des noeuds d'échec, il existe une interprétation partielle qui n'est pas un noeud d'échec et dont les deux prolongements sont des noeuds d'échec. Le prolongement par 0 falsifie alors une clause qui n'est pas purement négative. Il existe donc au moins une interprétation partielle qui soit un noeud d'échec et ne falsifie aucune clause négative de E. Comme l'ensemble des noeuds d'échec est fini, il en existe un maximal ayant cette propriété.

   Montrons maintenant l'unicité. Pour cela, il suffit de remarquer que l'ensemble des noeuds d'échec est totalement ordonné par $\geq_{lex}$, d'après la question précédente.

5. Soit E un ensemble de clauses insatisfaisable. Soit E^* sa clôture pour $\vdash_\neg$. E^* est insatisfaisable. Raisonnons par l'absurde et supposons que E^* ne contient pas la clause vide. Alors E^* a un arbre sémantique fini non vide dont toutes les feuilles sont des noeuds d'échec. D'après la question précédente, il existe une interprétation partielle maximale I qui est un noeud d'échec et ne falsifie aucune clause purement négative. Soit n l'indice maximal d'une variable propositionnelle dans le domaine de E.

   Soit C une clause de E^* falsifiée par I dont le nombre de littéraux positifs est minimal. Soit $C = P_i \vee C'$ et J la restriction de I à $\{P_1, \ldots, P_{i-1}\}$. $I(P_i) = 0$. On peut aussi supposer, par factorisation, que C' ne contient pas P_i.

   Par maximalité de I, tous les noeuds d'échec $K \geq_{lex} I$ ne falsifient que des clauses négatives. Si le prolongement de J par 1 à P_i n'était pas un noeud d'échec, il existerait une interprétation partielle supérieure strictement à I dont les deux fils sont des noeuds d'échec. Dans ce cas, celui qui correspond à l'interprétation par 0 correspondrait à une interprétation partielle qui ne falsifie aucune clause purement négative, ce qui est absurde.

   Il en résulte que le prolongement de J à P_i par 1 est un noeud d'échec et que ce prolongement (appelons le J_1) falsifie une clause purement négative $\neg P_i \vee C''$. Par résolution négative, $C' \vee C'' \in E^*$ et I falsifie C', I falsifie C'' (puisque I prolonge J qui falsifie C''). Or cette clause contient strictement moins de littéraux positifs que $C' \vee P_i$, ce qui est absurde.

Il en résulte que $\bot \in E^*$ et donc que $\vdash_\neg$ est réfutationnellement complet.

Exercice 34:

1. On considère l'ensemble de clauses $E = \{P \vee Q, \neg P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q\}$. E est insatisfaisable puisque chacune des quatre interprétations de P, Q falsifie l'une des clauses de E. On considère la fonction de sélection f telle que $f(P \vee Q) = P, f(P \vee \neg Q) = \neg Q, f(\neg P \vee Q) = Q, f(\neg P \vee \neg Q) = \neg P, f(P \vee \neg P) = P, f(Q \vee \neg Q) = \neg Q$. Les seules inférences possibles à partir de $\mathcal{E}$ suivant cette stratégie conduisent aux clauses $P \vee \neg P$ et $Q \vee \neg Q$. L'ensemble de clauses est alors saturé.
2. Ce n'est toujours pas réfutationellement complet. On considère l'ensemble de clauses (le littéral sélectionné est souligné) :

$$\underline{R} \vee P, \quad R \vee \underline{\neg P}, \quad \underline{\neg R} \vee Q, \quad \underline{P} \vee Q, \quad \neg P \vee \underline{\neg Q}, \quad P \vee \underline{\neg Q}, \quad \underline{Q} \vee R$$

   À chaque fois que c'est possible, on a sélectionné un littéral négatif.

   Toute inférence entre deux clauses de cet ensemble en suivant la stratégie de sélection conduit à une autre clause de l'ensemble. On ne peut donc pas déduire la clause vide. Pourtant l'ensemble de clauses est insatisfaisable, comme le montre la preuve suivante (les factorisations sont effectuées à la volée) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{R \vee P \quad R \vee \neg P}{R} \quad \neg R \vee Q}{Q} \quad \dfrac{\neg P \vee \neg Q \quad P \vee \neg Q}{\neg Q}}{\bot}$$

Exercice 35:

Si $\mathcal{E}$ est un ensemble de clauses de Horn, on note $\mathcal{E}^* = \{C \mid \mathcal{E} \vdash_f C\}$ et $I_0 = \mathcal{E}^* \cap \mathcal{P}$.

On considère d'abord le cas où $f(C) \in \mathcal{P}$ seulement si $C \in \mathcal{P}$, puis le cas général.

1. On remarque tout d'abord que, si la règle de résolution est appliquée à deux clauses de Horn (et a fortiori la résolution avec une stratégie de sélection), la clause résultante est à nouveau une clause de Horn, puisqu'un littéral positif des deux clauses prémisses a disparu. Il en résulte que $\mathcal{E}^*$ est un ensemble de clauses de Horn.

   Considérons l'interprétation I_0. Comme $\mathcal{E}$ est insatisfaisable, $I_0 \not\models \mathcal{E}$. Donc il existe une clause $C \in \mathcal{E}^*$ telle que $I_0 \not\models C$. Considérons une clause C contenant un nombre minimal de littéraux et telle que $I_0 \not\models C$. Supposons par l'absurde que C contient au moins un littéral. Dans ce cas, C contient au moins un littéral négatif (sinon $C \in I_0$). Soit $f(C) = \neg Q$. Comme $I_0 \not\models C$, $Q \in I_0$. Donc, par définition, $Q \in \mathcal{E}^*$. Alors, par r'esolution (comme $f(Q) = Q$ et $f(C) = \neg Q$), on obtient une clause $C' \in$

$\mathcal{E}^*$ telle que $C = \neg Q \vee C'$. Mais I_0 falsifie C' puisqu'elle falsifie tous les littéraux de C. Ce qui contredit la minimalité du nombre de littéraux de C. Donc $C =\perp$ et $\perp\in \mathcal{E}^*$: la stratégie est réfutationnellement complète.

2. On considère la suite I_n définie par

$$I_{n+1} = I_n \cup \{P \in \mathcal{P} | \exists P \vee \neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg Q_k \in \mathcal{E}^*, f(C) = P,\ Q_1, \ldots, Q_k \in I_n\}$$

et l'interprétation $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. À chaque $P \in I$ on associe le plus petit entier n_P tel que $P \in I_{n_P}$. À chaque clause $C = (P) \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m$ falsifiée par I, on associe la suite $N(C) = (n_1(C), \ldots, n_m(C))$ des n_{P_i}, triée par ordre décroissant (m dépend de C ; dans la suite on l'écrira $m(C)$). Si bien que ou bien $m(C) = 0$ et $C \in \mathcal{P} \cup \{\perp\}$, ou bien $n_1(C)$ est le plus petit entier tel que $I_{n_1(C)}$ falsifie C.

Comme $\mathcal{E}$ est insatisfaisable, il existe une clause $C \in \mathcal{E}^*$ telle que $I \not\models C$. On choisit une telle clause minimisant $N(C)$ pour l'ordre lexicographique (la suite vide est plus petite que toutes les autres).

Montrons d'abord que c'est possible, c'est à dire qu'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante $N(C_1) > N(C_2) \ldots$. Pour cela on raisonne par récurrence sur la paire constitutée de $(n_1(C_1), k(C_1))$ où $k(C_1)$ est le nombre d'entiers de la séquence $N(C_1)$ qui sont égaux à $n_1(C_1)$. Si $n_1(C_1) = 0$, $N(C_1) = \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{k(C_1)}$ et $N(C_1) > N(C_2)$ si et seulement si $k(C_1) > k(C_2)$, d'où le résultat. Sinon, pour toute suite infinie $N(C_1) = (\underbrace{n(C_1), \ldots, n(C_1)}_{k(C_1)}, L_1) > N(C_2) \ldots >$ ou bien, pour tout i, $n_1(C_i) = n_1(C_1)$ et $k(C_i) = k(C_1)$ et, dans ce cas, $N(C_i) = (\underbrace{n(C_1), \ldots, n(C_1)}_{k(C_1)}, L_i)$ et la suite $L_1, \ldots, L_i, \ldots$ est une suite strictement décroissante infinie, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence, ou bien il existe un i tel que $(n_1(C_1), k(C_1)) > (n_1(C_i), k(C_i))$ et il suffit d'appliquer l'hypothese de récurrence à la sous-suite de premier terme C_i.

Soit donc C une clause minimale de $\mathcal{E}^*$ qui est falsifiée par I. $C \in \mathcal{P} \cup \{\perp\}$ ou bien C est falsifiée par $I_{n_1(C)}$. Montrons que ce dernier cas est impossible et donc que $C \in \mathcal{P} \cup \{\perp\}$.

Si $f(C) = P \in \mathcal{P}$, alors, par définition de $I_{n_1(C)+1}$, $P \in I_{n_1(C)+1}$, ce qui contredit le fait que I falsifie C. Donc $f(C)$ est un littéral négatif $\neg Q$ et $n_Q \leq n_1(C)$. Soit $C = (P\vee)\neg Q \vee C'$. Par définition de n_Q, ou bien $Q \in \mathcal{E}^*$ (si $n_Q = 0$) ou bien il existe une clause $C_1 \in \mathcal{E}^*$ telle que $C_1 = Q \vee \neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_k$ et $n_1(C_1) < n_Q$.

Dans le premier cas, par une étape de R_f on obtient une clause $(P\vee)C' \in \mathcal{E}^*$ falsifiée par I et telle que $N(C') < N(C)$, ce qui est absurde.

Dans le deuxième cas, en une étape de R_f, on obtient la clause $C'' = (P\vee)C' \vee \neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_k \in \mathcal{E}^*$. C'' est falsifiée par I puisque C' est falsifiée par I (I falsifie C) et $Q_1, \ldots, Q_k \in I_{n_Q-1} \subseteq I$. De plus, $N(C') < N(C)$ puisque $n_{Q_1}, \ldots, n_{Q_k} < n_Q$. Ceci contredit la minimalité de C.

Il en résulte que $C \in \mathcal{P} \cup \{\bot\}$. Comme $C \in \mathcal{E}^*$, si $C \in \mathcal{P}$, alors $C \in I_0 \subseteq I$. Ce n'est pas possible puisque I falsifie C. Il en résulte que $C = \bot$ et donc $\bot \in \mathcal{E}^*$.

Exercice 36:

Il suffit de choisir pour fonction de sélection celle qui associe un littéral maximal dans chaque clause : on se ramène à la complétude de la stratégie ordonnée, puisque, après factorisation, les seules clauses qui ne sont pas des tautologies contiennent exactement une occurrence de la variable maximale.

Exercice 38:

Soit $L \text{ et } a \vee C_0$ une clause minimale de $\mathcal{E}^*$ et $L \text{ et } a$ un littéral maximal (et donc strictement maximal, sinon, par factorisation, on obtiendrait une clause plus petite).

Montrons que, si $C \in (\mathcal{E}^*(L))^*$, alors il existe des $e_1, \ldots e_n$ tels que $C \vee \overline{L} \text{ et } e_1 \vee \overline{L} \text{ et } e_n \vee C_0 \vee \cdots \vee C_0 \in \mathcal{E}^*$. Par récurrence sur la preuve.

Si la preuve est réduite à une feuille, cela résulte de la définition de $\mathcal{E}^*(L)$.

Si la dernière règle de la preuve est une résolution :

$$\frac{L_1 \text{ et } a_1 \vee C_1 \quad \overline{L_1} \text{ et } b_1 \vee C_1'}{C_1 \vee C_1'}$$

où $L_1 \text{ et } a_1$ et $\overline{L_1} \text{ et } b_1$ sont les littéraux sélectionnés.

Par hypothèse de récurrence, $L_1 \text{ et } a_1 \vee C_1 \vee \overline{L} \text{ et } e_1 \vee \ldots \vee \overline{L} \text{ et } e_n \vee C_0 \cdots \vee C_0 \in \mathcal{E}^*$ et $\overline{L_1} \text{ et } b_1 \vee C_1' \vee \overline{L} \text{ et } e_1' \vee \ldots \vee \overline{L} \text{ et } e_m' \vee C_0 \cdots \vee C_0 \in \mathcal{E}^*$. Si $L_1 \text{ et } a_1$ et $\overline{L_1} \text{ et } b_1$ sont maximaux dans ces deux clauses, le résolvant $C_1 \vee C_1' \vee \cdots$ est bien de la forme voulue.

Sinon, les littéraux de C_0 ne peuvent pas être maximaux, par minimalité de $L \text{ et } a \vee C_0$ et stricte maximalité de $L \text{ et } a$ dans cette clause.

Si maintenant un littéral $\overline{L} \text{ et } e$ est maximal, par résolution avec C, on obtient une clause de $\mathcal{E}^*$ dans laquelle ce littéral est remplacé par C_0, et on se ramène aux cas précédents.

Si la dernière règle est une factorisation, le résultat est immédiat : ou bien le littéral étiqueté factorisé reste maximal, ou bien, après une étape de résolution avec C, le littéral factorisé devient maximal.

Maintenant, si $C = \bot$, alors, $\overline{L} \text{ et } e_1 \vee \cdots \vee \overline{L} \text{ et } e_n \vee C_0 \vee \cdots \vee C_0 \in \mathcal{E}^*$. De plus $n \neq 0$ (et donc $n = 1$ par factorisation), par minimalité de $L \text{ et } a \vee C_0$ et stricte maximalité de $L \text{ et } a$ dans $L \text{ et } a \vee C_0$. De plus, toujours par minimalité de $L \text{ et } a \vee C_0$, $\overline{L} \text{ et } e_1$ est maximal. Par résolution avec C, on obtient $C_0 \vee \cdots \vee C_0 \in \mathcal{E}^*$, ce qui contredit à nouveau la minimalité de $L \text{ et } a \vee C_0$. Donc $\bot \notin (\mathcal{E}^*(L))^*$.

Montrons maintenant la complétude réfutationnelle. Supposons que $\mathcal{E}^*$ est insatisfaisable et, par l'absurde, que $\bot \notin \mathcal{E}^*$. Par compacité, on peut supposer sans perte de généralité que l'ensemble des littéraux étiquetés est fini. On construit alors par récurrence un modèle de $\mathcal{E}$ de la manière suivante : soit L un littéral maximal d'une clause minimale de $\mathcal{E}^*$. Comme $\bot \notin (\mathcal{E}^*(L))^*$, par hypothèse de récurrence, il existe un modèle M de $\mathcal{E}^*(L)$. Alors $M \cup \{L\}$ est un modèle de $\mathcal{E}$.

Exercice 39:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(P\vee\neg P)\vdash\neg(P\vee\neg P)}\,(Ax)\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(P\vee\neg P),P\vdash\neg(P\vee\neg P)}\,(Ax)\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P\vdash P}\,(Ax)}{P\vdash P\vee\neg P}\,(\vee I_1)}{\neg(P\vee\neg P),P\vdash P\vee\neg P}\,(Aff)}{\neg(P\vee\neg P),P\vdash\bot}\,(\neg E)}{\neg(P\vee\neg P)\vdash\neg P}\,(\neg I)}{\neg(P\vee\neg P)\vdash P\vee\neg P}\,(\vee I_2)}{\neg(P\vee\neg P)\vdash\bot}\,(\neg E)}{\vdash P\vee\neg P}\,(abs)$$

Exercice 40:

1. Par récurrence sur π : si π est une preuve de $\Gamma\vdash\phi$, il existe une preuve π' de $\Gamma\vdash\pi$ sans affaiblissement telle que $|\pi'|\le|\pi$.
   — Cas de base : π est une instance de l'axiome ; il n'y a pas d'affaiblissement.
   — Récurrence : si la dernière règle de π n'est pas un affaiblissement, il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence aux prémisses de la règle. Supposons maintenant que la dernière règle est un affaiblissement. Par hypothèse de récurrence, il existe une preuve π_1, de taille inférieure ou égale à celle de π qui n'utilise qu'un seul affaiblissement :

$$\pi_1=\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma_1\vdash\phi_1}\quad\cdots\quad\dfrac{\pi_n}{\Gamma_n\vdash\phi_n}}{\Gamma_0\vdash\phi}\,R}{\Gamma_0,\psi\vdash\phi}\,(Aff)$$

   où $R,\pi_1,\dots,\pi_n$ sont sans affaiblissement. Si R est un axiome ($n=0$), il existe une preuve de $\Gamma_0,\psi\vdash\phi$ par axiome. Sinon, pour tout i, $\dfrac{\dfrac{\pi_i}{\Gamma_i\vdash\phi_i}}{\Gamma_i,\psi\vdash\phi_i}\,(Aff)$ est de taille strictement inférieure à π (puisque $|\pi_1|\le|\pi|$), donc, par hypothèse de récurrence, il existe une preuve π_i' de $\Gamma_i,\psi\vdash\phi_i$, sans affaiblissement.

$$\pi'=\dfrac{\dfrac{\pi_1'}{\Gamma_1,\psi\vdash\phi_1}\quad\cdots\quad\dfrac{\pi_n'}{\Gamma_n,\psi\vdash\phi_n}}{\Gamma_0,\psi\vdash\phi}\,R$$

   est une preuve de $\Gamma_0,\psi\vdash\phi$ sans affaiblissement.

2. On considère une interprétation non standard du connecteur $\vee$, dans laquelle $\vee$ est interprété comme $\wedge$.Tous les autres connecteurs logiques ont leur interprétation habituelle. Toutes les règles de **NK**, sauf les règles d'introdcuction de $\vee$ sont correctes pour cette interprétation :

c'est immédiat, sauf pour la règle d'élimination de $\vee$, pour laquelle on vérifie que $I \models^n \Gamma \vdash \phi \vee \psi$ et $I \models^n \Gamma, \phi \vdash \theta$ entraine $I \models^n \Gamma \vdash \theta$. Il en résulte, par récurrence sur la longueur de la preuve, que tout jugement prouvable sans les règles d'introduction de $\vee$ est valide dans cette interprétation non standard.

Si on pouvait prouver $P \vdash P \vee Q$ sans les règles d'introduction de $\vee$, on aurait donc, dans cette interprétation non standard, $I \models^n P$ entraine $I \models^n P \vee Q$, ce qui est absurde. **NK**privé des règles d'introduction de $\vee$ est donc incomplet.

Table des matières