Exercice 215
Montrer que, si pour tous entiers n, m tels que $n \neq m$, $T \models \overline{n} \neq \overline{m}$, et f est une fonction totale sur les entiers, alors la condition 2. de la définition 9.3.1 est une conséquence des autres.

Un prédicat P sur les entiers est *représentable* dans T ssi sa fonction caractéristique est représentable dans T.

Exercice 216
Montrer que le prédicat $P \subseteq \mathbb{N}^k$ est représentable dans $\mathsf{Th}(A)$ ssi il existe une formule ϕ_P telle que

1. $(n_1, \ldots, n_k) \in P$ entraine $A \models P(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$
2. $(n_1, \ldots, n_k) \notin P$ entraine $A \models \neg P(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$

Une théorie T est *cohérente* s'il n'y a pas de formule ϕ telle que $T \models \phi \wedge \neg\phi$.

Exercice 217
Montrer que si T est cohérente, on peut remplacer les implications dans les points 1 et 2 de la définition 9.3.1 par des équivalences.

Les théorèmes d'incomplétude sont basés sur la représentabilité des fonctions récursives dans des théories de l'arithmétique. Remarquons d'abord l'indécidabilité des théories dans lesquelles les fonctions récursives sont représentables.

Lemme 9.3.1 *Si les fonctions récursives sont représentables dans la théorie T, et si T est cohérente, alors T n'est pas récursive.*

Preuve:
Raisonnons par l'absurde et supposons que l'ensemble des conséquences logiques de A soit récursif. Soit

$$P = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists \phi . n =< \phi(x) > \& T \models \phi\{x \mapsto \overline{m}\}\}$$

P est alors récursif. Donc l'ensemble suivant aussi :

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid (n, n) \notin P\}$$

Comme les fonctions récursives sont représentables, il existe une formule $\psi(x)$ telle que $T \models \psi\{x \mapsto \overline{n}\}$ ssi $n \in E$. Mais alors on considère $\theta = \psi\{x \mapsto \overline{< \psi >}\}$.

$$T \models \theta \Leftrightarrow < \psi > \in E \Leftrightarrow (< \psi >, < \psi >) \notin P \Leftrightarrow T \not\models \theta$$

Ce qui est absurde. (Noter qu'on utilise la cohérence pour avoir les équivalences).

Corollaire 9.3.1 *Soit A est un ensemble récursif de formules closes et $T = Th(A)$. Si les fonctions récursives sont représentables dans T et si T est cohérente, alors T est incomplète.*

Puisque sinon, la théorie T serait récursive car récursivement énumérable et co-récursivement énumérable.

Exercice 218
Que se passe-t-il si l'on enlève l'hypothèse de cohérence dans le lemme 9.3.1 ?

Exercice 219
Que se passe-t-il si l'on enlève la condition 2, dans la définition 9.3.1 ?

9.4 Indécidabilité de l'arithmétique

Un des premiers objectifs est de montrer que les fonctions récursives sont représentables dans une théorie T minimale de l'arithmétique. Alors, d'après le lemme 9.3.1, l'ensemble des théorèmes n'est pas récursif et donc la théorie est ou bien incohérente ou bien incomplète.

On peut déjà noter que le résultat d'incomplétude est, d'une manière générale, déjà acquis ; Soit $\mathsf{Th}(\mathbb{N})$ les énoncés du premier ordre sur l'alphabet $*, +, 0, 1, =, \geq$ et qui sont valides dans les entiers.

Théorème 9.4.1 *$\mathsf{Th}(\mathbb{N})$ n'est pas récursivement énumérable.*

Preuve:
En effet, s'il était récursivement énumérable, il serait aussi co-récursivement énumérable puisque l'ensemble des négations des énoncés non-valides serait récursivement énumérable. Il en résulte que $\mathsf{Th}(\mathbb{N})$ serait récursif. De plus, les fonctions récursives sont représentables dans $\mathsf{Th}(\mathbb{N})$. En effet, d'après le théorème 7.3.2, il suffit de montrer que les fonctions de $\mathcal{C}$ sont représentables. Les fonctions initiales sont trivialement représentables. Il suffit de montrer que les fonctions représentables dans $\mathsf{Th}(\mathbb{N})$ sont closes par minimisation et composition. Pour la composition,soit $g(\vec{x}) = f(h_1(\vec{x}), \ldots, h_k(\vec{x}))$. Si $\phi_f, \phi_{h_1}, \ldots, \phi_{h_k}$ sont les formules représentant $f, h_1, \ldots, h_k$ resp. alors soit

$$\phi_g(\vec{x}, y) \stackrel{\text{def}}{=} \exists z_1, \ldots, z_k.\phi_f(z_1, \ldots, z_k, y) \land \phi_{h_1}(\vec{x}, z_1) \land \ldots \land \phi_{h_k}(\vec{x}, z_k)$$

Pour tous entiers $\vec{n}, m$, $\phi_g(\vec{n}, m) \in Th(\mathbb{N})$ ssi il existe des entiers $p_1, \ldots, p_k$ tels que $\phi_f(p_1, \ldots, p_k, m)$, $\phi_{h_1}(\vec{n}, p_1), \ldots, \phi_{h_k}(\vec{n}, p_k) \in Th(\mathbb{N})$. Par hypothèse de récurrence, ces formules sont dans la théorie ssi $m = f(p_1, \ldots, p_k)$, $p_1 = h_1(\vec{n}), \ldots, p_k = h_k(\vec{n})$. Et donc ssi $m = g(\vec{n})$.

Pour la minimisation, soit $g(\vec{x}) = \min_y(f(\vec{x}, y) = 0)$. On définit alors

$$\phi_g(\vec{x}, z) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_f(\vec{x}, z, 0) \land \forall y, \forall z'((y < z) \land \phi_f(\vec{x}, y, z')) \Rightarrow z' > 0$$

À nouveau, on obtient que ϕ_g représente g dans $Th(\mathbb{N})$.

Alors, par le lemme 9.3.1, l'ensemble des théorèmes de $\mathsf{Th}(\mathbb{N})$ n'est pas récursif. Mais $\mathsf{Th}(\mathbb{N})$ est cohérente et contient tous ses théorèmes. Donc $\mathsf{Th}(\mathbb{N})$ n'est pas récursive. Contradiction.

De cette preuve, on déduit aussi que :

Corollaire 9.4.1 *Il n'existe pas d'axiomatisation récursive de $\mathsf{Th}(\mathbb{N})$.*

Preuve:
En effet, d'après le lemme **??**, si A est récursive, l'ensemble des formules $\phi \in \mathsf{Th}(A)$ est récursivement énumérable et ne peut donc pas coïncider avec $\mathsf{Th}(\mathbb{N})$, d'après le théorème 9.4.1.

Autrement dit : il existe des énoncés vrais non démontrables dans les entiers.

Exercice 220

1. Montrer qu'il existe des fonctions non récursives qui sont représentables dans $\mathsf{Th}(\mathbb{N})$.
2. Montrer qu'il existe des fonctions (de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) non représentables dans $\mathsf{Th}(\mathbb{N})$.

Exercice 221
Montrer que toute axiomatisation récursive des entiers (avec addition, multiplication et égalité) est incohérente ou incomplète.

(A_+)	$A \models \phi_+(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k})$	Pour tous $m, n, k \in \mathbb{N}$ tels que $m + n = k$
(A_{f+})	$A \models \forall x.(\phi_+(\overline{n}, \overline{m}, x) \to x = \overline{k})$	Pour tous $m, n, k \in \mathbb{N}$ tels que $m + n = k$
$(A_\times)$	$A \models \phi_\times(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k})$	Pour tous $m, n, k \in \mathbb{N}$ tels que $m \times n = k$
$(A_{f\times})$	$A \models \forall x.(\phi_\times(\overline{n}, \overline{m}, x) \to x = \overline{k})$	Pour tous $m, n, k \in \mathbb{N}$ tels que $m \times n = k$
$(A_=)$	$A \models \overline{m} \neq \overline{n}$	Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \neq n$
$(A_\leq)$	$A \models \forall x.(x \leq \overline{n} \leftrightarrow (x = \overline{0} \vee \ldots \vee x = \overline{n}))$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$
$(A_{<>})$	$A \models \forall x. x \leq \overline{n} \vee x > \overline{n}$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$

où $x \leq y \stackrel{\text{def}}{=} \exists z.\phi_+(z, x, y)$ et $x > y \stackrel{\text{def}}{=} \exists z.\phi_+(z, y, x) \wedge x \neq y$.

FIGURE 9.2 – Propriétés des axiomes permettant re représenter les fonctions récursives

9.5 Théories contenant l'arithmétique élémentaire

L'objectif de cette partie est de montrer que toute théorie axiomatique contenant l'arithmétique élémentaire est incohérente ou indécidable.

En fait on montre que, dès que l'ensemble d'axiomes satisfait les propriétés de la figure 9.2, elle est indécidable ou incohérente.

Lemme 9.5.1 *Si A est une axiomatisation qui satisfait les propriétés de la figure 9.2, alors les fonctions récursives sont représentables dans* $\mathsf{Th}(A)$.

Preuve:
On montre que l'ensemble des fonctions représentables dans $\mathsf{Th}(A)$ contient les fonctions récursives initiales, l'addition, la multiplication, légalité et est clos par composition et minimisation. Il suffit alors de conclure à l'aide du théorème 7.3.2.

La représentabilité de $=$ résulte de $(A_=)$. La représentabilité de $+$ (resp $\times$) est une conséquence de $(A_=), (A_+), (A_{f+})$ (resp. $(A_=), (A_\times), (A_{f\times})$), d'après l'exercice 215.

La clôture par composition est immédiate, car $A \models \phi_f(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{n})$ et $A \models \phi_{g_i}(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_q}, n_i)$ pour $1 \leq i \leq k$ entraine

$$A \models \exists z_1, \ldots, z_k.\phi_f(z_1, \ldots, z_k, \overline{n}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \phi_{g_i}(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_q}, z_i)$$

par complétude sémantique. (Aucune propriété de la figure 9.2 n'est nécessaire). On utilise $(A_=)$ pour la propriété 2 des fonctions représentables.

Soit maintenant $f(n_1, \ldots, n_k) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{m : g(n_1, \ldots, n_k, m) = 0\}$ et soit ϕ_g représentant g. Soit

$$\phi_f(x_1, \ldots, x_k, x) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_g(x_1, \ldots, x_k, x, \overline{0}) \wedge \forall z.(z < x \to \neg\phi_g(x_1, \ldots, x_k, x, \overline{0}))$$

Montrons d'abord que $f(n_1, \ldots, n_k) = n$ entraine $A \models \phi_f(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{n})$. Comme ϕ_g représente g, $A \models \phi_g(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{n}, \overline{0})$ et, par définition, pour $p < n$,

$g(n_1, \ldots, n_k, p) \neq 0$, donc $A \models \neg\phi_g(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{p}, \overline{0})$. Donc $A \models \forall x.(x \neq \overline{p} \vee \neg\phi_g(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, x, \overline{0}))$ et par conséquent, grâce à $(A_{\leq})$,

$$(1) \qquad A \models \forall x.(x < \overline{n} \rightarrow \neg\phi_g(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, x, \overline{0}))$$

D'où $A \models \phi_f(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{n})$

Montrons maintenant la fonctionalité Soit $f(n_1, \ldots, n_k) = n$. Remarquons d'abord que

$$A \models \forall x.(x \leq \overline{n} \wedge \phi_f(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, x)) \rightarrow x = \overline{n}$$

en utilisant $(A_{\leq})$ et (1). Grâce à $(A_{<>})$, il suffit donc de montrer

$$(3) \qquad A \models \forall x.(x > \overline{n} \rightarrow \neg\phi_f(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, x))$$

Mais, par représentabilité de g, $A \models \phi_g(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{n}, \overline{0})$. Donc

$$(2) \qquad A \models \forall x.(x > \overline{n} \rightarrow (\exists z.z < x \wedge \phi_g(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, z, \overline{0})))$$

Mais, par définition de ϕ_f, $A \models \forall x.(\exists z.z < x \wedge \phi_g(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, z, \overline{0}))) \rightarrow \neg\phi_f(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, x)$. Donc (2) entraine (3), ce qui conclut.

Il reste à montre la deuxième propriété des fonctions représentables. Si $f(n_1, \ldots, n_k)$ est indéfinie, alors, pour tout entier m, ou bien $g(n_1, \ldots, n_k, m)$ est indéfinie, ou bien $g(n_1, \ldots, n_k, m) \neq 0$. Dans tous les cas, par représentabilité de g, $A \models \neg\phi_g(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{m}, \overline{0})$ et donc $A \models \neg\phi_f(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{m})$.

Si $f(n_1, \ldots, n_k) = m' \neq m$, alors, par fonctionalité, $A \models \phi_f(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{m'}) \rightarrow \overline{m} = \overline{m'}$. Comme par ailleurs, $A \models \overline{m} \neq \overline{m'}$, on obtient $A \models \neg\phi_f(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{m'})$.

Lemme 9.5.2 *Les axiomes de l'arithmétique élémentaire satisfont les propriétés de la figure 9.2.*

Preuve:
On définit $\phi_=(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x = y$, $\phi_+(x,y,z) \stackrel{\text{def}}{=} x+y = z$, $\phi_\times(x,y,z) \stackrel{\text{def}}{=} x\times y = z$, l'entier n étant représenté par le terme $\overline{n} \stackrel{\text{def}}{=} s^n(0)$.

Montrons successivement les propriétés de la figure 9.2 :

(A_+) revient à montrer que, pour tous n,m, $Q \models s^n(0)+s^m(0) = s^{n+m}(0)$. Il suffit de faire une récurrence sur m, en utilisant (A_3) et (A_4).

(A_{f+}) (comme $(A_{f\times})$ est immédiat avec ce codage.

$(A_\times)$ revient à montrer que, pour tous n,m, $Q \models s^n(0)\times s^m(0) = s^{n\times m}(0)$. À nouveau, on prouve le résultat par récurrence sur m : si $m = 0$, il suffit d'utiliser l'axiome (A_5). Sinon, par (A_6) : $Q \models s^n(0) \times s(s^{m-1}(0)) = (s^n(0) \times s^{m-1}(0)) + s^n(0)$. Par hypothèse de récurrence, $Q \models s^n(0) \times s^m(0) = s^{n\times(m-1)}(0)+s^n(0)$ et, par la propriété que nous venons de voir sur l'addition, $Q \models s^n(0) \times s^m(0) = s^{n\times(m-1)+n}(0)$.

$(A_=)$ On montre, par récurrence sur $\min\{n,m\}$ que $Q \models s^n(0) \neq s^m(0)$ en utilisant (A_1) pour le cas de base et (A_2) pour l'étape de récurrence.

$(A_\leq)$ Il nous faut montrer, pour tout n que $Q \models \forall x.((\exists y.x + y = s^n(0)) \rightarrow (x = 0 \vee x = s(0) \vee \cdots \vee x = s^n(0))$.

Montrons tout d'abord que $Q \models \forall x.(x \leq 0 \rightarrow x = 0)$. Autrement dit que $Q \models \forall x,y.(y+x = 0 \rightarrow x = 0)$. Notons que, $Q \models \forall x.(x = 0\vee\exists z.x = s(z))$ d'après (A_7). Donc

$$Q \models \forall x,y.(y+x = 0 \rightarrow ((x = 0\wedge y+0 = 0)\vee(\exists z.x = s(z)\wedge y+s(z) = 0)))$$

Donc, d'après $(A_3), (A_4)$,

$$Q \models \forall x,y.(y+x = 0 \rightarrow ((x = 0 \wedge y = 0) \vee (\exists z.x = s(z) \wedge s(y+z) = 0)))$$

Mais, d'après (A_1), $Q \models s(y + z) \neq 0$. Donc

$$Q \models \forall x,y,.(y + x = 0 \rightarrow (x = 0 \wedge y = 0))$$

ce qui est ce que nous voulions.

Maintenant, on montre, par récurrence sur n que $Q \models \forall x,y.(x + y = s^n(0) \rightarrow x = 0 \vee x = s(0) \vee \ldots \vee x = s^n(0)$. Le cas de base est celui que nous venons de voir. Dans le cas général, par (A_7),

$$Q \models \forall x,y.(y+x = s^n(0) \rightarrow ((x = 0\wedge y+0 = s^n(0))\vee(\exists.z.x = s(z)\wedge y+s(z) = s^n(0))))$$

On utilise alors (A_3) d'une part et (A_4) puis (A_2) d'autre part :

$$Q \models \forall x,y.(y+x = s^n(0) \rightarrow ((x = 0\wedge y = s^n(0))\vee(\exists z.x = s(z)\wedge y+z = s^{n-1}(0))))$$

Par hypothèse de récurrence,

$$Q \models \forall x,y.(y+x = s^n(0) \rightarrow ((x = 0\wedge y = s^n(0))\vee(\exists z.x = s(z)\wedge(z = 0\vee\cdots\vee z = s^{n-1}(0))))$$

Ce qui donne la propriété voulue.

($A_{<>}$) On prouve, par récurrence sur n, que, pour tout n, $Q \models \forall x.(x \leq s^n(0) \vee s^n(0) \leq x)$. Quand $n = 0$, $Q \models \forall x.x+0 = x$ donc $Q \models \forall x, \exists z.z+0 = x : Q \models \forall x.x \geq 0$.

Pour la récurrence, on utilise (A_7) : $Q \models x = 0 \vee \exists z.x = s(z)$. Comme nous l'avons vu, $Q \models 0 \leq s^n(0)$. De plus, par hypothèse de récurrence, $Q \models \forall z.(z \leq s^{n-1}(0) \vee z \geq s^{n-1}(0))$.

De plus, en utilisant (A_4) et (A_2), $Q \models \forall z.(s(z) \leq s^n(0)) \leftrightarrow z \leq s^{n-1}(0)$ et $Q \models \forall z.(s(z) \geq s^n(0) \leftrightarrow z \geq s^{n-1}(0))$. Donc $Q \models \forall x, z.(x = s(z) \to (x \leq s^n(0) \vee x \geq s^n(0)))$, ce qui conclut.

Corollaire 9.5.1 *Si A contient les axiomes de l'arithmétique élémentaire (et A est récursif), alors $\mathsf{Th}(A)$ est soit incohérente soit indécidable (et donc incomplète).*

Cela résulte du lemme 9.3.1 et des résultats précédents.

Exercice 222
Montrer que l'arithmétique de Peano est indécidable.

Exercice 223
Montrer que l'arithmétique de Peano contient strictement l'arithmétique élémentaire et est strictement contenue dans $Th(\mathbb{N})$.

Exercice 224

1. Montrer que, dans l'arithmétique de Peano, $\leq$ (défini par $x \leq y \stackrel{\text{def}}{=} \exists z.x + z = y$) est une relation d'ordre (i.e. les axiomes des relations d'ordre sont prouvables).
2. Donner un modèle dénombrable de l'arithmétique de Peano dans lequel $\leq$ n'est pas un ordre bien fondé
3. A-t-on $PA \models \forall x, y.x \leq y \vee y \leq x$?

Exercice 225 (7)
Montrer que, si l'on retire la propriété ($A_{\leq}$) des propriétés de la figure 9.2, il existe des théories cohérentes qui satisfont ces propriétés et dans lesquelles certaines fonctions récursives ne sont pas représentables.

9.6 Théorèmes de Gödel

Nous savons déjà que Q (ainsi que l'arithmétique de Peano) sont incohérentes ou incomplètes (corollaire 9.5.1). Mais cette preuve repose sur le lemme 9.3.1, dont la preuve est elle-même effectuée dans une meta-théorie, puisque nous commençons par dire : "ou bien P est récursif, ou bien P n'est pas récursif". Mais "P est récursif" n'est pas un énoncé que nous pouvons coder dans l'arithmétique de Peano.

L'objectif est donc ici de donner une preuve d'incomplétude plus élémentaire, qui peut être elle-même codée dans l'arithmétique de Peano. Ceci permettrait de montrer le deuxième théorème d'incomplétude : l'arithmétique de Peano permet d'énoncer sa propre cohérence, mais pas de la prouver (à moins d'être incohérente).

Dans cette partie, nous utilisons un système de preuve (ensemble récursif de règles d'inférence) qui est complet pour la logique du premier ordre. En outre, nous utilisons un codage des preuves dans les entiers. Par exemple, on peut utiliser les deux symboles supplémentaires de l'alphabet, que nous avions pris la précaution d'inclure : $\{, \}$, qui permettent de coder les arbres de preuves dans des chaines de caractères sur un alphabet fixe et donc dans les entiers. Si ϕ est une formule prouvable, en utilisant une preuve $\Pi(\phi)$, on note $< \Pi(\phi) >$ l'entier qui code cette preuve. Un tel codage est récursif.

On supposera dans la suite que l'ensemble A d'axiomes est récursif (ce qui est le cas de l'arithmétique élémentaire et de l'arithmétique de Peano) et que l'ensemble des règles d'inférence est récursif. C'est le cas d'un système de règles d'inférence (sémantiquement) complet pour la logique du premier ordre.

Exercice 226
Expliquer pourquoi, dans ce cas, l'ensemble $\{(n, m) \in \mathbb{N}^2 | \exists \phi, n =< \phi > \& m =< \Pi(\phi) >\}$ est récursif.

Dans un premier temps, on supposera que T est ω cohérente.

Definition 9.6.1 *Une théorie est ω-cohérente si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T \vdash \phi(\overline{n})$, alors $T \not\vdash \exists x. \neg \phi(x)$.*

Exercice 227 (5)

1. Montrer que si T est ω-cohérente, alors T est cohérente.
2. Donner un exemple de théorie qui est cohérente et pas ω-cohérente
3. Existe-t-il une théorie qui satisfait les propriétés de la figure 9.2 et qui est cohérente sans être ω-cohérente ?

Exercice 228 (5)
Montrer que, si T est ω cohérente et vérifie les propriétés $(A_+), (A_{f+}), (A_\times), (A_{f\times}), (A_=)$, alors elle est incomplète.

Le lemme suivant est l'un des énoncés originaux dûs à Gödel ; la formule Ω est en fait une formule qui exprime sa propre non prouvabilité et donc, intuitivement, ne peut ni être prouvée, ni sa négation être prouvée, sous peine d'incohérence. La preuve, comme celle de Rosser qui suivra, est basée excactement sur la même idée que la preuve du lemme 9.3.1.

Lemme 9.6.1 *Si les fonctions récursives sont représentables dans T et si T est ω-cohérente, alors il existe une formule Ω telle que $T \not\vdash \Omega$ et $T \not\vdash \neg\Omega$.*

Preuve:
Soit $P \stackrel{\text{def}}{=} \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists\phi(x).n =< \phi(x) > \ \& \ m =< \Pi(\phi(\overline{n})) >\}$ P est l'ensemble des paires d'entiers tels que le premier code une formule avec une variable libre et le deuxième est une preuve de la formule appliquée à son propre code.

P est un ensemble récursif : on peut vérifier que n est le code d'une formule $\phi(x)$ et on peut calculer $\phi(\overline{n})$ et vérifier que le second est le code d'une preuve de $\phi(\overline{n})$.

Par hypothèse P est donc représentable par une formule $\phi_P(x, y)$. (**Note** : si nous avions été plus explicites dans le codage des formules et des preuves, nous pourrions donner explicitement ϕ_P). Soit alors $\psi(x) = \forall y.\neg\phi_P(x, y)$ et $\Omega = \psi(\overline{< \psi >})$.

Si $T \vdash \Omega$, alors par définition de P, il existe un entier m tel que $(< \psi >, m) \in P$. Donc $T \vdash \phi_P(\overline{< \psi >}, \overline{m})$ et donc $T \vdash \exists y.\phi_P(\overline{\psi}, y)$, soit $T \vdash \neg\psi(\overline{< \psi >})$, c'est-à dire $T \vdash \neg\Omega$, ce qui contredit la cohérence de la théorie.

Donc $T \not\vdash \Omega$.

On a besoin de la ω-cohérence pour la réciproque : si $T \vdash \neg\psi(\overline{< \psi >})$, alors $T \vdash \exists y.\phi_P(\overline{< \psi >}, y)$ par définition de ψ.

Par ω-cohérence, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $T \not\vdash \neg\phi_P(\overline{< \psi >}, \overline{n})$

Alors, ou bien $T \vdash \phi_P(\overline{< \psi >}, \overline{n})$, ou bien la théorie T est incomplète : il suffit de choisir $\Omega' = \phi_P(\overline{< \psi >}, \overline{n})$.

Dans le premier cas, on a par ailleurs $T \vdash \psi(\overline{< \psi >})$ par définition de P. Et, en conclusion $T \vdash \Omega$ ssi $T \vdash \neg\Omega$. Si la théorie est cohérente, $T \not\vdash \Omega$ et $T \not\vdash \neg\Omega$.

Cette preuve n'est pas satisfaisante pour deux raisons. D'abord, elle fait l'hypothèse de ω-cohérence, qui est (a priori) plus forte que la cohérence. Ensuite, elle n'est pas totalement constructive puisqu'elle laisse le choix entre plusieurs énoncés Ω qui ne sont pas prouvables et dont la négation n'est pas prouvable.

L'étape suivante est une amélioration de ce résultat (Rosser 1936) dans laquelle on n'utilise plus l'ω-cohérence, mais seulement la cohérence.

Théorème 9.6.1 *Si T est cohérente et satisfait les propriétés de la figure 9.2, alors on peut construire une formule Ω telle que $T \not\vdash \Omega$ et $T \not\vdash \neg\Omega$.*

Preuve:
On définit les deux prédicats suivant :

$$\widetilde{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists\phi(x).\, n =< \phi(x) > \ \& \ m =< \Pi(\neg\phi(\overline{n})) >\}$$
$$P \stackrel{\text{def}}{=} \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists\phi(x).\, n =< \phi(x) > \ \& \ m =< \Pi(\phi(\overline{n})) >\}$$

$\widetilde{P}$ et P sont deux prédicats récursifs, d'après l'exercice 226 et les propriétés de clôture de l'ensemble des fonctions récursives. D'après le lemme 9.5.1, nos hypothèses entrainent la représentabilité dans T des fonctions récursives. Donc en particulier de $\widetilde{P}, P$: il existe des formules $\phi_{\widetilde{P}}$ et ϕ_P qui représentent respectivement $\widetilde{P}$ et P. (**Note** : Si nous avions été plus explicites sur le codage des preuves et des formules, nous pourrions donner explicitement ces formules au lieu de donner une définition ensembliste de $\widetilde{P}, P$). On définit alors :

$$\theta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \forall y.(\phi_P(x,y) \to \exists z.\, z < y \,\wedge\, \phi_{\widetilde{P}}(x,z))$$

Et $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \theta(\overline{<\theta>})$. Intuitivement, Ω exprime que, si elle est prouvable, il existe une preuve plus petite de sa négation.

Si $T \vdash \Omega$ alors soit $m =< \Pi(\Omega) >$. $(<\theta>, m) \in P$, par définition de P (il existe une preuve de θ appliquée à son propre code). Donc

$$T \vdash \phi_P(\overline{<\theta>}, \overline{m}) \qquad \text{Par définissabilité de } P$$

Par ailleurs, par hypothèse de cohérence et définissabilité de $\widetilde{P}$,

$$T \vdash \neg\phi_{\widetilde{P}}(\overline{<\theta>}, \overline{n}) \qquad \text{Pour tout } n \in \{0, \ldots, m-1\}$$

Donc

$$T \vdash \phi_P(\overline{<\theta>}, \overline{m}) \wedge \neg\phi_{\widetilde{P}}(\overline{<\theta>}, \overline{0}) \wedge \cdots \wedge \neg\phi_{\widetilde{P}}(\overline{<\theta>}, \overline{m-1})$$

$$T \vdash \phi_P(\overline{<\theta>}, \overline{m}) \wedge \forall z. z < \overline{m} \to \neg\phi_{\widetilde{P}}(\overline{<\theta>}, z) \qquad \text{Par } A_{\leq}$$

$$T \vdash \exists y. \phi_P(\overline{<\theta>}, y) \wedge \forall z. z < y \to \neg\phi_{\widetilde{P}}(\overline{<\theta>}, z)$$

Soit exactement $T \vdash \neg\theta(\overline{<\theta>})$. Nous concluons $T \vdash \neg\Omega$.

Si $T \vdash \neg\Omega$ soit $e =< \Pi(\neg\Omega) >$. Par définition de $\widetilde{P}$, $(<\theta>, e) \in \widetilde{P}$. Par représentabilité de $\widetilde{P}$,

$$T \vdash \phi_{\widetilde{P}}(\overline{<\theta>}, \overline{e})$$

$$T \vdash \forall x.(\overline{e} < x \to \exists z. z < x \wedge \phi_{\widetilde{P}}(\overline{<\theta>}, z) \qquad \text{Par complétude sémantique}$$

$$(4) \qquad T \vdash \forall x.(x \leq \overline{e} \vee \exists z. z < x \wedge \phi_{\widetilde{P}}(\overline{<\theta>}, z) \qquad \text{Par } (A_{<>})$$

Par ailleurs, par cohérence, $T \not\vdash \theta(\overline{<\theta>})$, donc, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(<\theta>, m) \notin P$:

$$T \vdash \neg\phi_P(\overline{<\theta>}, \overline{m}) \qquad \text{Pour tout } m \in \mathbb{N}, \text{ par représentabilité de } P$$

En particulier pour $m \leq e$:

$$T \vdash \forall x.(x \leq \overline{e} \to \neg\phi_P(\overline{<\theta>}, x)) \qquad \text{En utilisant } (A_{\leq})$$

$$T \vdash \forall x.(\neg\phi_P(\overline{<\theta>}, x)) \vee (\exists z. z < x \wedge \phi_{\widetilde{P}}(\overline{<\theta>}, z)) \qquad \text{En utilisant (4)}$$

Mais cette dernière formule est exactement θ :

$$T \vdash \theta(\overline{<\theta>})$$

d'où la contradiction.

Dans la preuve, nous avons utilisé, pour la bonne compréhension, des raisonnements sur les entiers et les ensembles d'entiers, mais il faut noter que tous ces raisonnements peuvent être formalisés dans PA.

Exercice 229 (6)
Φ est l'ensemble des formules du premier ordre sans variable libre sur les prédicats $\{=\}$ et les symboles de fonction $\mathcal{F} = \{0(0), S(1), +(2), \times(2)\}$. Si Π est une preuve de $Q \vdash \phi$, on note $< \Pi(\phi) > \in \mathbb{N}$ son code. $\mathbb{N}$ est le modèle de Q dans lequel les fonctions ont leur interprétation habituelle.

Soit $D = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists \phi \in \Phi, n =< \phi > \& m =< \Pi(\phi) >\}$ et $\phi_D(x, y)$ une formule qui représente D dans Q. (En supposant Q cohérente), parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies pour tous les énoncés $\phi \in \Phi$? Justifier.

1. $\mathbb{N} \models \phi \to (\exists x.\phi_D(\overline{< \phi >}, x))$
2. $Q \vdash \phi \to (\exists x.\phi_D(\overline{< \phi >}, x))$
3. $\mathbb{N} \models (\exists x.\phi_D(\overline{< \phi >}, x)) \to \phi$
4. $Q \vdash (\exists x.\phi_D(\overline{< \phi >}, x)) \to \phi$.

Exercice 230
Montrer que, si PA est cohérente, alors $PA \vdash \forall x.\neg\phi_P(\overline{< \theta >}, x)$.

9.7 Deuxième théorème d'incomplétude

On montre ici que, si PA est cohérente e, alors la cohérence de PA ne peut être prouvée dans PA. Ce résultat est connu sous le nom de "deuxième théorème d'incomplétude de Gödel". Il implique en particulier l'échec du programme de Hilbert : on ne peut pas prouver la cohérence de PA dans Q.

On définit d'abord le prédicat de prouvabilité :

$$PR \stackrel{\text{def}}{=} \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists \phi . n =< \phi > \& m =< \Pi(\phi) >\}$$

PR est récursif. Par représentabilité des fonctions récursives dans PA, il existe donc une formule ϕ_{PR} qui représente PR dans PA.

On définit alors la cohérence de PA dans PA par :

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \forall x . \neg \phi_{PR}(\overline{< \bot >}, x)$$

Théorème 9.7.1 *Si PA est cohérente, alors $PA \not\vdash C$.*

Preuve:
Nous ne faisons pas la preuve complète. Nous admettons que la preuve du premier théorème d'incomplétude peut être formalisée dans PA même. Plus précisément nous admettons que

$$(1) \qquad PA \vdash C \to \forall x . \neg \phi_{PR}(\overline{< \Omega >}, x)$$

Notons que, avec de la sueur, en spécialisant la représentabilité des fonctions récursives aux prédicats qui nous intéressent, on peut totalement éliminer les références ensemblistes que nous avons utilisées par commodité et obtenir que $PA \vdash C \to \neg \phi_{PR}(\overline{< \Omega >}, \overline{n})$ pour tout entier n. Mais il reste des étapes non triviales pour obtenir la preuve admise ci-dessus.

Remarquons maintenant qu'ont peut définir ϕ_P telle que

$$\phi_P(\overline{< \phi >}, x) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{PR}(\overline{< \phi(\overline{< \phi >}) >}, x)$$

et, de même,

$$\phi_{\widetilde{P}}(\overline{< \phi >}, x) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{PR}(\overline{< \neg\phi(\overline{< \phi >}) >}, x)$$

La formule $\Omega = \theta(\overline{< \theta >})$ où $\theta(x) = \forall z . \phi_P(x,z) \to \exists y < z . \phi_{\widetilde{P}}(x,y)$ vérifie alors

$$\Omega = \forall z . \phi_{PR}(\overline{< \Omega >}, z) \to \exists y < z . \phi_{PR}(\overline{< \neg\Omega >}, y)$$

Par complétude sémantique,

$$PA \vdash (\forall x . \neg \phi_P(\overline{< \Omega >}, x)) \to (\forall x . \phi_P(\overline{\Omega}, x) \to \exists y < x . \phi_{PR}(\overline{< \neg\Omega >}, y))$$

et donc, d'après l'osbervation ci-dessus,

$$PA \vdash (\forall x . \neg \phi_P(\overline{< \Omega >}, x)) \to \Omega$$

En utilisant (1) on obtient alors

$$PA \vdash C \rightarrow \Omega$$

On ne peut donc pas avoir $PA \vdash C$, sans quoi $PA \vdash \Omega$.

Ce résultat entraine que si T est contenue dans PA, T ne permet pas de démontrer la cohérence de PA, à moins que T soit incohérente.

Exercice 231
Montrer que PA est cohérente ssi elle est ω-cohérente. Cette preuve peut-elle être formalisée dans PA ?

Exercice 232
Montrer que, si T est une théorie contenant PA et T permet de prouver sa propre cohérence, alors T est incohérente.