Devoir de calculabilité à rendre avant le 22 octobre 2015

1 Machines à compteurs

n désigne ici le nombre de compteurs. Dans les parties ultérieures, on choisira toujours $n = 2$.

Les machines considérées sont des machines définies par un ensemble fini d'états Q, un état initial $q_0 \in Q$ et une fonction de transition δ de $Q \times \{0,1\}^n$ dans $Q \times \{-1,0,1\}^n$ telle que

- si $\delta(q,(b_1,\ldots,b_n)) = (q',(d_1,\ldots,d_n))$, alors, pour tout i, si $b_i = 0$, alors $d_i \neq -1$.
- Si $\delta(q,(b_1,\ldots,b_n)) = (q_1,(d_1,\ldots,d_n))$ et $\delta(q,(b'_1,\ldots,b'_n)) = (q'_1,(d'_1,\ldots,d'_n))$ et $(b_1,\ldots,b_n) \neq (b'_1,\ldots,b'_n)$, alors $q_1 \neq q'_1$. [1]

La machine comporte un unique état final $q_f \in Q_f$ et $\delta(q_f,(b_1,\ldots,b_n)) = (q_f,(0,\ldots,0))$.

Une *configuration* de la machine est la paire d'un état $q \in Q$ et un vecteur $v \in \mathbb{N}^n$. Un *mouvement* de la machine est défini par $(q,(v_1,\ldots,v_n)) \vdash (q',(v'_1,\ldots,v'_n))$ si

- $\delta(q,(b_1,\ldots,b_n)) = (q',(d_1,\ldots,d_n))$,
- pour tout i, $b_i = 0$ si et seulement si $v_i = 0$
- pour tout i, $v'_i = v_i + d_i$

Étant donné un état initial $q_0 \in Q$, une *configuration initiale* est un tuple $(q_0,(v_0,0,\ldots,0))$. v_0 est ici la *donnée* de la machine. La machine *accepte* $m \in \mathbb{N}$ s'il existe une séquence $(q_0,(m,0,\ldots,0)) \vdash (q_1,v_1) \vdash \cdots \vdash (q_f,v)$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. Donner une machine à deux compteurs M_k qui, à partir de la donnée s, atteint une configuration $(q_f,(r,q))$ où q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de s par k.

2. Si M est une machine de Turing sur l'alphabet Σ et $k = |\Sigma| + 1$, on associe à chaque configuration $\gamma = (q,w,w')$ de la machine de Turing le tuple $\overline{\gamma} = (q,c(w),0,c(\widetilde{w'}),0)$ où $c(w)$ est l'entier représenté en base k par w et $\widetilde{w}$ est l'image miroir de w, définie par récurrence par $\widetilde{\epsilon} = \epsilon$ et $\widetilde{a \cdot w} = \widetilde{w} \cdot a$.

   Montrer que, pour toute machine de Turing M, on peut construire une machine à 4 compteurs $\overline{M}$ telle que, $\gamma \vdash_M \gamma'$ ssi $\overline{\gamma} \vdash^*_{\overline{M}} \overline{\gamma'}$.

   En déduire que le problème suivant est indécidable:

   Donnée: une machine à 4 compteurs M et un entier n

   Question: M accepte n

3. En codant 4 entiers a,b,c,d par $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$, montrer que le problème suivant est indécidable:

   Donnée: une machine à 2 compteurs M

   Question: M accepte 0

[1]Cette condition n'est habituellement pas présente dans les définitions de machines à compteurs, mais elle peut-être utile dans les parties suivantes.

2 Gendarme et voleur avec états et tests

On considère le jeu donné par un ensemble fini d'états Q, deux fonctions de $Q \times \{0,1\}^2$ dans $(Q \times \mathbb{Z}^2)^*$, notées δ_g et δ_v et une configuration initiale (positions du gendarme et du voleur): $(q_v^0, w_v^0), (q_g^0, w_g^0) \in Q \times \mathbb{N}^2$.

Une configuration du jeu se compose de deux paires $(q_g, V_g) \in Q \times \mathbb{N}^2$, $(q_v, V_v) \in Q \times \mathbb{N}^2$. Si $(v_1, v_2) \in \mathbb{N}^2$, on note $Z((v_1, v_2))$ la paire $(b_1, b_2) \in \{0,1\}^2$ telle que $b_i = 0$ ssi $v_i = 0$ (tests à zéro).

La relation $\to_v$ entre configurations du jeu, appelée *mouvements du voleur* est définie par:

$$(q_v, V_v), (q_g, V_g) \to_v (q'_v, V'_v), (q_g, V_g)$$

Si $(q', x) \in \delta_v(q_v, Z(V_v))$ et $x + V_v = V'_v \in \mathbb{N}^2$. On suppose que, dans toute configuration, il y a au moins un mouvement possible pour le voleur.

La relation $\to_g$ entre configurations du jeu, appelée *mouvements du gendarme* est définie par:

$$(q_v, V_v), (q_g, V_g) \to_v (q_v, V_v), (q'_g, V'_g)$$

Si $(q', x) \in \delta_g(q_g, Z(V_g))$ et $x + V_g = V'_g \in \mathbb{N}^2$. On suppose que, dans toute configuration, il y a au moins un mouvement possible pour le gendarme.

Une *partie* est une séquence de configurations commençant par la configuration initiale:

$$(q_v^0, V_v^0), (q_g^0, V_g^0) \to_v (q_v^1, V_v^1), (q_q^0, V_g^0) \to_g \dots$$

Les mouvements sont alternativement des mouvements du voleur et des mouvements du gendarme. Le voleur commence. Si bien que, après un nombre pair du mouvements, c'est au voleur d'effectuer un mouvement, sinon c'est au gendarme d'effectuer un mouvement.

Le gendarme *gagne la partie* si l'une des configurations de la séquence est $(q, V), (q, V)$. Sinon, le voleur gagne.

Une *stratégie du voleur* (resp. du gendarme) est une application σ de l'ensemble des configurations dans $Q \times \mathbb{Z}^2$ telle que $\sigma((q_v, V_v), (q_g, V_g)) \in \delta_v(q_v, Z(V_v))$ Une partie est jouée par le voleur suivant la stratégie σ si, dans cette partie, tout mouvement du voleur $(q_v, V_v), (q_g, V_g) \to_v (q'_v, V'_v), (q_g, V_g)$ est tel que $V'_v = V_v + x$ avec $(q'_v, x) \in \sigma((q_v, V_v), (q_g, V_g))$. Les stratégies du gendarme sont définies de manière analogue.

Une stratégie σ du voleur (resp. du gendarme) est gagnante si toute partie jouée par le voleur (resp. le gendarme) suivant la stratégie σ est gagnante pour le voleur (resp. le gendarme).

Montrer que le problème suivant est indécidable:

Donnée: un jeu de gendarme et voleur avec états et tests

Question: Le voleur a une stratégie gagnante

Montrer que l'existence d'une stratégie gagnante pour le gendarme est aussi indécidable.

3 Gendarme et voleur avec états (sans test)

On considère le jeu donné par un ensemble fini d'états Q et deux fonctions de Q dans $(Q \times \mathbb{Z}^2)^*$, notées δ_g et δ_v et une configuration initiale.

Une configuration du jeu se compose de deux paires $(q_g, V_g) \in Q \times \mathbb{N}^2$, $(q_v, V_v) \in Q \times \mathbb{N}^2$.

La relation $\rightarrow_v$ entre configurations du jeu, appelée *mouvements du voleur* est définie par:

$$(q_v, V_v), (q_g, V_g) \rightarrow_v (q'_v, V'_v), (q_g, V_g)$$

Si $(q', x) \in \delta_v(q_v)$ et $x + V_v = V'_v \in \mathbb{N}^2$. On suppose que, dans toute configuration, il y a au moins un mouvement possible pour le voleur.

La relation $\rightarrow_g$ entre configurations du jeu, appelée *mouvements du gendarme* est définie par:

$$(q_v, V_v), (q_g, V_g) \rightarrow_v (q_v, V_v), (q'_g, V'_g)$$

Si $(q', x) \in \delta_g(q_g)$ et $x + V_g = V'_g \in \mathbb{N}^2$. On suppose que, dans toute configuration, il y a au moins un mouvement possible pour le gendarme.

Les définitions de partie, stratégie et conditions de victoire sont les mêmes que dans le cas où il est possible de faire des tests.

Montrer que le problème suivant est indécidable:

Donnée: un jeu de gendarme et voleur avec états.

Question: Le voleur a une stratégie gagnante

Ind: On pourra dédoubler les transitions en deux phases: durant la première phase, le joueur s'engage sur le résultat du test, et durant la deuxième phase, met à jour les compteurs suivant son engagement. Si, après la première phase, le gendarme estime que l'engagement du voleur n'est pas conforme aux tests à 0, il doit pouvoir effectuer un déplacement qui lui permet, en deux coups, de punir le voleur.

4 Gendarme et voleur, sans état et sans test

Dans cette dernière version du jeu, le gendarme et le voleur disposent chacun d'un ensemble fini de vecteurs de $\mathbb{Z}^3$, notés resp. E_v et E_g. Une configuration du jeu est une paire de vecteurs de $\mathbb{N}^3$: la position V_v du voleur et la position V_g du gendarme.

Un mouvement du voleur (resp. du gendarme) est défini par $V_v, V_g \to_v V_v + U, V_g$ (resp. $V_v, V_g \to V_v, V_g + U$) où $U \in E_v$ (resp. $U \in E_g$). Le mouvement n'est possible que si l'on obtient une configuration: les vecteurs résultants doivent être dans $\mathbb{N}^3$.

Comme avant, on suppose que, dans toute configuration, le gendarme comme le voleur, peuvent effectuer un mouvement (éventuellement en restant sur place).

Une partie est, comme précédemment, une séquence de mouvements alternativement du voleur et du gendarme (le voleur commence), à partir d'une configuration initiale V_v^0, V_g^0.

Le gendarme gagne une partie si l'une des configuration de la partie se compose de deux vecteurs identiques. Sinon, le voleur gagne.

Une stratégie du voleur (resp. du gendarme) est une application qui à chaque configuration associe un vecteur de E_v (resp. de E_g). Une stratégie est gagnante si toute partie jouée selon cette stratégie est gagnante.

Montrer que le problème suivant est indécidable:

Donnée: $V_v^0, V_g^0 \in \mathbb{N}^3$, $E_v, E_g \in (\mathbb{Z}^3)^*$

Question: le voleur a une stratégie gagnante

Ind: on pourra considérer un codage c des états dans les entiers tel que l'application $f$de $Q \times Q \setminus \{(q,q) \mid q \in Q\}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par $f(q,q') = c(q) - c(q')$ soint injective.