Programmation Avancée

Sous-typage: extensions

David Baelde

ENS Paris-Saclay, L3 2020–2021

Paires

Termes : constructeur $\langle u_1, u_2 \rangle$ et projections $\pi_1 u$ et $\pi_2 u$.
Réduction : $\pi_i \langle u_1, u_2 \rangle \rightsquigarrow u_i$.
Types : ajout de $\tau_1 \times \tau_2$ et des règles

$$\frac{\Gamma \vdash u_1 : \tau_1 \quad \Gamma \vdash u_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash \langle u_1, u_2 \rangle : \tau_1 \times \tau_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : \tau_1 \times \tau_2}{\Gamma \vdash \pi_i u : \tau_i}$$

La même démarche que précédemment nous conduit à la règle de sous-typage suivante :

$$\frac{\tau_1 \leq \tau_1' \quad \tau_2 \leq \tau_2'}{\tau_1 \times \tau_2 \leq \tau_1' \times \tau_2'}$$

La relation $\leq$ ainsi étendue reste réflexive et transitive.

Exemple

Si $\mathsf{Even} \leq \mathsf{Nat}$, on a $\mathsf{Even} \times \mathsf{Nat} \leq \mathsf{Nat} \times \mathsf{Nat}$ et $(\tau \times \mathsf{Nat}) \to \tau' \leq (\tau \times \mathsf{Even}) \to \tau'$.

Enregistrements

Termes : on ajoute la construction $\{\ell_1 = u_1; \ldots; \ell_n = u_n\}$ et la projection $u.\ell$.
Réduction : $\{\ell_1 = u_1; \ldots; \ell_n = u_n\}.\ell_i \rightsquigarrow u_i$.
Types : on ajoute les types $\{\ell_1 : \tau_1; \ldots; \ell_n : \tau_n\}$ et les règles

$$\frac{\Gamma \vdash u_1 : \tau_1 \quad \ldots \quad \Gamma \vdash u_n : \tau_n}{\Gamma \vdash \{\ell_i = u_i\}_{1 \leq i \leq n} : \{\ell_i : \tau_i\}_{1 \leq i \leq n}} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : \{\ell_i : \tau_i\}_{1 \leq i \leq n} \quad 1 \leq j \leq n}{\Gamma \vdash u.\ell_j : \tau_j}$$

Sous-typage : covariant, mais l'ensemble des étiquettes décroit quand les types croissent.

$$\frac{J \subseteq I \quad \{\ \tau_j \leq \tau'_j\ \}_{j \in J}}{\{\ell_i : \tau_i\}_{i \in I} \leq \{\ell_j : \tau'_j\}_{j \in J}}$$

Exemple

Si Nat $\leq$ Real, on a $\{x : \mathrm{Nat}, y : \mathrm{Nat}, \mathit{color} : \mathrm{Color}\} \leq \{x : \mathrm{Real}, y : \mathrm{Real}\}$.

Cela reste réflexif et transitif... attention par contre aux représentations à l'exécution.

Enregistrements

Termes : on ajoute la construction $\{\ell_1 = u_1; \ldots; \ell_n = u_n\}$ et la projection $u.\ell$.
Réduction : $\{\ell_1 = u_1; \ldots; \ell_n = u_n\}.\ell_i \rightsquigarrow u_i$.
Types : on ajoute les types $\{\ell_1 : \tau_1; \ldots; \ell_n : \tau_n\}$ et les règles

$$\frac{\Gamma \vdash u_1 : \tau_1 \quad \ldots \quad \Gamma \vdash u_n : \tau_n}{\Gamma \vdash \{\ell_i = u_i\}_{1 \leq i \leq n} : \{\ell_i : \tau_i\}_{1 \leq i \leq n}} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : \{\ell : \tau\}}{\Gamma \vdash u.\ell : \tau}$$

Sous-typage : covariant, mais l'ensemble des étiquettes décroit quand les types croissent.

$$\frac{J \subseteq I \quad \{\ \tau_j \leq \tau'_j\ \}_{j \in J}}{\{\ell_i : \tau_i\}_{i \in I} \leq \{\ell_j : \tau'_j\}_{j \in J}}$$

Exemple

Si Nat $\leq$ Real, on a $\{x : \text{Nat}, y : \text{Nat}, \mathit{color} : \text{Color}\} \leq \{x : \text{Real}, y : \text{Real}\}$.

Cela reste réflexif et transitif... attention par contre aux représentations à l'exécution.

Variants

Termes : $`\ell(u)$ et $\mathsf{match}\ u\ \mathsf{with}\ \{`\ell_i(x_i) \mapsto v_i\}_{i\in I}$.
Réduction : $\mathsf{match}\ `\ell_j(u)\ \mathsf{with}\ \{`\ell_i(x_i) \mapsto v_i\}_{i\in I} \rightsquigarrow v_j\{x_j \mapsto u\}$ pour $j \in I$.
Typage : ajout des types sommes $[`\ell_1 : \tau_1 \mid \ldots \mid `\ell_n : \tau_n]$ et des règles

$$\frac{\Gamma \vdash u : \tau_j}{\Gamma \vdash `\ell_j(u) : [`\ell_i : \tau_i]_{i\in I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : [`\ell_i : \tau_i]_{i\in I} \quad \{\ \Gamma, x_i : \tau_i \vdash v_i : \tau\ \}_{i\in I}}{\Gamma \vdash \mathsf{match}\ u\ \mathsf{with}\ \{`\ell_i \mapsto v_i\}_{i\in I} : \tau}$$

Sous-typage : covariant, et les ensembles d'étiquettes croissent avec les types.

$$\frac{I \subseteq J \quad \{\ \tau_i \leq \tau_i'\ \}_{i\in I}}{[`\ell_i : \tau_i]_{i\in I} \leq [`\ell_j : \tau_j']_{j\in J}}$$

Exemple

$[`\mathit{point2D} : \mathsf{Int} \times \mathsf{Int}] \leq [`\mathit{point2D} : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \mid `\mathit{point3D} : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \times \mathsf{Real}]$

Polymorphisme

On considère le λ-calcul polymorphe, plus général que / différent de ML.

Types : variables α et quantification $\forall\alpha.\tau$.

Termes : généralisation $\Lambda\alpha.u$ et spécialisation $u\tau$ avec la réduction $(\Lambda\alpha.u)\tau \rightsquigarrow u\{\alpha \mapsto \tau\}$.

$$\frac{\Gamma \vdash u : \forall\alpha.\tau}{\Gamma \vdash u\tau : \tau'\{\alpha \mapsto \tau\}} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : \tau}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha.u : \forall\alpha.\tau}\ \alpha \notin \mathrm{ftv}(\Gamma)$$

Polymorphisme

On considère le λ-calcul polymorphe, plus général que / différent de ML.
Types : variables α et quantification $\forall\alpha.\tau$.
Termes : généralisation $\Lambda\alpha.u$ et spécialisation $u\tau$ avec la réduction $(\Lambda\alpha.u)\tau \leadsto u\{\alpha \mapsto \tau\}$.

$$\frac{\Gamma \vdash u : \forall\alpha.\tau}{\Gamma \vdash u\tau : \tau'\{\alpha \mapsto \tau\}} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : \tau}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha.u : \forall\alpha.\tau}\ \alpha \notin \mathrm{ftv}(\Gamma)$$

Préservation du typage quand $(\Lambda\alpha.u)\tau_a \leadsto u\{\alpha \mapsto \tau_a\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash u : \tau_2}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha.u : \forall\alpha.\tau_2} \quad \forall\alpha.\tau_2 \leq \forall\alpha.\tau_1}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha.u : \forall\alpha.\tau_1}}{\Gamma \vdash (\Lambda\alpha.u)\tau_a : \tau_1\{\alpha \mapsto \tau_a\}} \qquad \tau_1\{\alpha \mapsto \tau_a\} \leq \tau}{\Gamma \vdash (\Lambda\alpha.u)\tau_a : \tau}$$

On a $\Gamma \vdash u\{\alpha \mapsto \tau_a\} : \tau_2\{\alpha \mapsto \tau_a\}$, on veut $\tau_2\{\alpha \mapsto \tau_a\} \leq \tau_1\{\alpha \mapsto \tau_a\}$ pour conclure.

Polymorphisme

On considère le λ-calcul polymorphe, plus général que / différent de ML.
Types : variables α et quantification $\forall\alpha.\tau$.
Termes : généralisation $\Lambda\alpha.u$ et spécialisation $u\tau$ avec la réduction $(\Lambda\alpha.u)\tau \rightsquigarrow u\{\alpha \mapsto \tau\}$.

$$\frac{\Gamma \vdash u : \forall\alpha.\tau}{\Gamma \vdash u\tau : \tau'\{\alpha \mapsto \tau\}} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : \tau}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha.u : \forall\alpha.\tau}\ \alpha \notin \mathsf{ftv}(\Gamma)$$

Sous-typage au moyen des règles suivantes :

$$\frac{}{\alpha \leq \alpha} \qquad \frac{\tau \leq \tau'}{\forall\alpha.\tau \leq \forall\alpha.\tau'}$$

Exemple

Avec Even $\leq$ Nat on dérive $\forall\alpha.((\alpha \times \text{Nat}) \to \alpha) \leq \forall\alpha.((\alpha \times \text{Even}) \to \alpha)$.
Avec en plus la règle pour Any, on a $\forall\alpha.\alpha \leq \forall\alpha.\text{Any}$ et $\forall\alpha.(\text{Any} \to \text{Unit}) \leq \forall\alpha.(\alpha \to \text{Unit})$.