Logique Informatique

Partiel 2019

Vous avez trois heures. Tous les documents sont autorisés, et les dispositifs électroniques sont exclus. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans démonstration.

Exercice 1 (déduction naturelle classique)

Pour chacun des séquents suivants, donner un contre-modèle [1] ou une preuve dans NK_0.

1. $\neg\neg(A \vee \neg A) \vdash A$
2. $\neg(A \vee \neg A) \vdash A$

Exercice 2 (quizz)

Nous nous plaçons en calcul propositionnel classique. Pour chacun des énoncés suivants, indiquer s'il est vrai ou faux, en justifiant.

1. Si une formule a un modèle alors elle a un modèle fini, i.e. un sous-ensemble fini de $\mathcal{P}$.
2. Deux ensembles de formules admettant le même arbre sémantique ont les mêmes modèles.
3. On garde la complétude réfutationnelle de la résolution binaire si l'on contraint la résolution au cas où au moins une prémisse ne contient que des littéraux positifs et la factorisation au cas où tous les littéraux sont négatifs.
4. Si E est un ensemble de clauses insatisfaisable, alors toute clause est dérivable à partir de E en utilisant la résolution binaire, la factorisation, l'affaiblissement mais pas le tiers-exclu.
5. Toute clause valide est dérivable en utilisant uniquement le tiers-exclu et l'affaiblissement.

Exercice 3 (non-non traduction)

Dans cet exercice on considère la syntaxe restreinte de formules propositionnelles :

$$\varphi ::= \bot \mid P \mid \varphi \Rightarrow \varphi$$

On rappelle en figures 1 et 2 les calculs des séquents classiques et intuitionnistes spécialisés pour ce fragment ; on a vu qu'ils sont corrects et complets pour les logiques associées. On utilisera la notation $\neg\varphi$ pour $\varphi \Rightarrow \bot$. On définit ensuite la non-non traduction $(\bullet)^*$ comme suit :

$$\begin{array}{rcl} (\bot)^* & \equiv & \bot \\ (P)^* & \equiv & \neg\neg P \\ (\varphi \Rightarrow \psi)^* & \equiv & (\varphi)^* \Rightarrow (\psi)^* \end{array}$$

1. On fait de la logique classique, on attend donc une interprétation $I \subseteq \mathcal{P}$.

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi, \Delta}\ \text{ax} \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot_L$$
$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi \vdash \Delta}\ \Rightarrow_L \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi, \Delta}\ \Rightarrow_R$$

FIGURE 1 – Calcul LK_0 pour le fragment de l'exercice 3.

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ \text{ax} \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash \varphi}\ \bot_L$$
$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma, \psi \vdash \varphi'}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi \vdash \varphi'}\ \Rightarrow_L \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi}\ \Rightarrow_R$$

FIGURE 2 – Calcul LJ_0 pour le fragment de l'exercice 3.

Pour un multi-ensemble $\Delta = \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, on écrira $(\Delta)^*$ pour $(\varphi_1)^*, \ldots, (\varphi_n)^*$. De façon similaire, on écrira $\neg(\Delta)^*$ pour $\neg(\varphi_1)^*, \ldots, \neg(\varphi_n)^*$.

1. Montrer que pour tout φ on a $\vdash_{LK} (\varphi)^* \Leftrightarrow \varphi$.
2. Montrer que pour tout φ on a $\vdash_{LJ} \neg\neg(\varphi)^* \Rightarrow (\varphi)^*$.
3. Montrer que pour tout Γ et Δ, on a $\Gamma \vdash_{LK} \Delta$ ssi $(\Gamma)^*, \neg(\Delta)^* \vdash_{LJ} \bot$.
4. Conclure que φ est valide en logique classique ssi $(\varphi)^*$ est valide en logique intuitionniste.

Exercice 4 (logique intuitionniste)

1. Soit ψ une formule quelconque. Pour chacun des C_i suivants, existe-t-il une formule φ_i telle que, pour toute structure de Kripke, $\mathcal{K}, w \models \varphi_i$ ssi $(\mathcal{K}, w) \in C_i$? Justifier.
   - $C_1 = \{(\mathcal{K}, w) \mid \text{il existe } w' \geq w \text{ tel que } w' \models \psi\}$
   - $C_2 = \{(\mathcal{K}, w) \mid \text{pour tout } w' \geq w \text{ on a } w' \models \psi\}$
   - $C_3 = \{(\mathcal{K}, w) \mid \text{il n'existe pas de } w' > w\}$
2. Soit une formule propositionnelle φ, et soit $P_1, \ldots, P_n$ les variables propositionnelles qui y apparaissent. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   a. φ est valide en logique classique ;
   b. $\varphi \wedge \bigwedge_{i \in [1;n]} P_i \vee \neg P_i$ est valide en logique intuitionniste.