TD9 2 avril 2015

Logique

David Baelde
<baelde@lsv.ens-cachan.fr>

Exercice 1
On considère $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{=(2)\}$. On considère la formule $\forall x.\ x = x$ et le schéma de formules $\forall x \forall y.\ x = y \Rightarrow P[x/z] \Rightarrow P[y/z]$ où P est une formule quelconque avec z pour seule variable libre.

1. Démontrer en LK que la symétrie de l'égalité est conséquence de ces formules.
2. De même pour la transitivité.
3. Qu'en est-il du reste de la théorie de l'égalité ? de l'inégalité $0 \neq s(0)$?

Exercice 2
Démontrer la formule du buveur dans le système de dérivation systématique de la preuve de complétude du précédent cours, en prenant une énumération arbitraire des termes.

Exercice 3
Nous nous proposons de retrouver le théorème de Herbrand en exploitant notre calcul des séquents complet pour le calcul des prédicats classique.

1. Pour toute paire de règles du calcul LK monolatère, déterminer si deux instances adjacentes des règles, dont les formules principales ne sont pas sous-formules l'une de l'autre.
2. Soit une formule close $\exists x_1 \ldots \exists x_n.\ \phi$, avec ϕ sans quantificateur. En utilisant la question précédente, montrer que cette formule est dérivable si et seulement si il existe des termes $t_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ tels que la formule $\phi[t_{1,1}/x_1, \ldots, t_{n,1}/x_n] \vee \ldots \phi[t_{1,m}/x_1, \ldots, t_{n,m}/x_n]$ soit dérivable.
3. Montrer que l'énoncé de la question précédente est équivalent au théorème de Herbrand.