TD6 5 mars 2015

Logique

David Baelde
<baelde@lsv.ens-cachan.fr>

Exercice 1
On considère l'alphabet (ou signature) $\mathcal{F} = \{s(1)\}$.

1. Donner deux $\mathcal{F}$-algèbres finies ayant même domaine et telles qu'il n'existe aucun morphisme de l'une dans l'autre.
2. Donner deux $\mathcal{F}$-algèbres distinctes, de même domaine et isomorphes.

Exercice 2
Montrer que les formules $\exists x \forall y.\ P(x, y)$ et $\forall y \exists x.\ P(x, y)$ ne sont pas équivalentes. L'une de ces formules implique-t-elle l'autre ?

Exercice 3
Dans cet exercice, on peut librement choisir $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$. Donner une formule satisfaisable qui n'a pas de modèle fini.

Exercice 4 (formule du buveur)
Le paradoxe du buveur s'énonce ainsi :

> Dans tout bar (non vide) il existe un client, appelé le buveur, tel que si le buveur boit tout le monde boit.

Cet énoncé vous semble-t-il valide ? Formaliser en logique du premier ordre, en utilisant un prédicat unaire b indiquant si une personne boit — le bar est implicite, représenté par la structure, les clients étant les éléments du domaine de la structure.

Exercice 5 (logique monadique)
Supposant que $\mathcal{P}$ ne contient que des symboles de prédicats unaires et que $\mathcal{F}$ ne contient que des symboles de fonction unaires, montrer que toute formule satisfaisable admet un modèle fini. (Commencer par le cas où $\mathcal{F}$ est vide.)

Exercice 6 (zéro et successeur)
On prend $\mathcal{F} = \{\ 0(0),\ s(1)\ \}$. On considère la théorie composée des axiomes de l'égalité et des formules suivantes :

$$\begin{array}{cl} \forall x.\ 0 \neq s(x) & (F_0) \\ \forall x.\ s(x) = s(y) \Rightarrow x = y & (F_s) \\ \forall x.\ x \neq s^n(x) & (F_n) \text{ pour tout } n > 0 \end{array}$$

1. Donner tous les modèles de cette théorie, modulo isomorphisme.
2. Si l'on enlève F_0 de la théorie, donner deux modèles de la théorie résultante qui ne soient pas élémentairement équivalents.
   Et si on enlève F_s ? F_n ?

Exercice 7 (examen 2011-2012)
On dit que deux structures sont *élémentairement équivalentes* si elles satisfont les mêmes formules du premier ordre. On pose $\mathcal{P} = \{\geq\}$ et $\mathcal{F} = \emptyset$, et on considère les $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structures $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ où $\geq$ est interprété de façon canonique.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas élémentairement équivalents.
2. On va montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont élémentairement équivalents. Si σ est une substitution à valeurs dans $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$) on note $\geq_\sigma$ la relation d'ordre définie par $x \geq_\sigma y$ ssi $x\sigma \geq_{\mathcal{S}} y\sigma$.
   (a) Montrer que $\mathcal{S}, \sigma \vDash \phi$ ssi pour toute affectation θ telle que $\geq_\theta$ est identique à $\geq_\sigma$, on a $\mathcal{S}, \theta \vDash \phi$.
   (b) Conclure.