Logique

David Baelde <baelde@lsv.ens-cachan.fr>

Exercice 1 (topologie)
On suppose $\mathcal{P} = \{p_k : k \in \mathbb{N}\}$. On munit l'ensemble des interprétations d'une distance :

$$d(\mathcal{I}, \mathcal{J}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k-1} \times |\mathcal{I}(p_k) - \mathcal{J}(p_k)|$$

1. Montrer que pour tout E, l'ensemble des modèles de E est un fermé pour la topologie induite par d.
2. Montrer la réciproque.

Exercice 2 (application du cours)
On considère l'ensemble de formules suivant :

$$E = \{\ \neg((P_1 \Rightarrow P_3) \Rightarrow P_2),\ P_2 \vee ((P_1 \vee P_3) \wedge \neg P_3)\ \}$$

Mettre ces formules en forme normale conjonctive pour obtenir un ensemble de clauses équivalent à E. Construire l'arbre sémantique associé à cet ensemble de clauses. Cet ensemble de clauses est-il satisfaisable ? À partir de l'arbre sémantique, construire un modèle ou une preuve d'incohérence par résolution.

Exercice 3 (factorisation)
Montrer que la complétude réfutationnelle est perdue si on oublie la règle de factorisation, mais qu'on la retrouve si on transforme la règle de résolution comme suit :

$$\frac{C \vee P \vee \ldots \vee P \quad \neg P \vee \ldots \vee \neg P \vee C'}{C \vee C'}$$

Cette règle revient à traiter les clauses comme des ensemble de littéraux.

Exercice 4 (Horn-SAT)
Une clause de Horn est un clause contenant au plus un littéral positif. Donner un algorithme pour décider la satisfaisabilité d'un ensemble (fini) de clauses de Horn en temps polynomial.

Exercice 5 (examen 2014)
On considère un ordre sur les littéraux, et la restriction de la règle de résolution au cas où le littéral sur lequel on résout est maximal dans chacune des deux clauses en prémisse. Si E est un ensemble de formules, on note E^* l'ensemble de ses conséquences par la règle de factorisation et la règle de résolution contrainte comme décrit ci-dessus. Si S est un ensemble de clauses, on note $R_S(E)$ l'ensemble des conséquences de E par factorisation et résolution contre des clauses de S.

1. Montrer que si E est saturé et ne contient pas $\perp$, et U est un ensemble de clauses unitaires (ayant exactement un littéral) alors $R_U(E)$ est saturé et ne contient pas $\perp$.
2. Soit E un ensemble de clauses. Soit $U(E)$ l'ensemble de ses clauses unitaires, et $\mathcal{P}_1$ l'ensemble des variables propositionnelles apparaissant dans $U(E)$. Soit $S(E) = R_{U(E)}(E^*) \cap \mathcal{F}_0(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1)$
   Montrer que pour $S_1 \subseteq \mathcal{P}_1$ et $S_2 \subseteq \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1$ on a ($S_1 \models U(E)$ et $S_2 \models S(E)$) ssi $S_1 \cup S_2 \models E$.
3. Montrer que si E est saturé et ne contient ni $\perp$ ni clause unitaire, et L est un littéral minimal de E, alors $E \cup \{\overline{L}\}$ est saturé.
4. Montrer que si E est fini et E^* ne contient pas $\perp$ alors E^* admet un modèle. En déduire que la stratégie de résolution considérée est réfutationnellement complète.