Logique

David Baelde <baelde@lsv.ens-cachan.fr>

Exercice 1
Soit $\mathcal{Q}$ une partie finie de l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P}$. Donner l'index de la relation d'équivalence logique sur l'ensemble des formules à variables dans $\mathcal{Q}$.

Exercice 2
On considère $\mathcal{P}$ infini dénombrable. Donner un ensemble de formules dont l'ensemble des modèles est infini mais dénombrable.

Exercice 3
On pose $M(E) = \{\mathcal{I} : \mathcal{I} \vDash E\}$. Soit E et E' deux ensembles dénombrables de formules. Définir F tel que $M(F) = M(E) \cap M(E')$. Définir G tel que $M(F) = M(E) \cup M(E')$.

Exercice 4
Montrer qu'un graphe est coloriable avec k couleurs si et seulement si chacun de ses sous-graphes finis est coloriable avec k couleurs.

Exercice 5
On note $|\phi|$ la taille de ϕ (nombre de connecteurs logiques) et $\tau(\phi)$ la taille minimale d'une forme clausale pour ϕ. Donner une famille de formules $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $|\phi_n|$ soit linéaire en n et $\tau(\phi_n)$ soit exponentiel en n.

Exercice 6 (théorème d'interpolation)
Soient ϕ et ψ telles que $\phi \vDash \psi$.

1. Montrer qu'il existe une formule θ telle que $\phi \vDash \theta$ et $\theta \vDash \psi$ et les variables propositionnelles apparaissant dans θ apparaissent aussi dans ϕ et ψ.
2. En supposant que q n'apparait pas dans ϕ, calculer un interpolant pour $p \wedge q \vDash \phi$ et $\phi \vDash p \wedge q$ en appliquant la méthode proposée en point 1.

Exercice 7
Un ensemble de formules E est *indépendant* si, pour toute formule $\phi \in E$, $E \setminus \{\phi\} \not\models \phi$.

1. Montrer que, pour tout ensemble fini de formules E, il existe un sous-ensemble indépendant $E' \subseteq E$ tel que, pour tout $\phi \in E$, $E' \models \phi$.
2. Donner un ensemble infini de formules E qui n'admette aucun sous-ensemble E' qui soit indépendant et logiquement équivalent à E, *i.e.*, pour tout $\phi \in E'$, $E \models \phi$ et pour tout $\psi \in E$, $E' \models \psi$.
3. Montrer que, pour tout ensemble dénombrable E de formules, il existe un ensemble indépendant E' logiquement équivalent à E.