Calcul des équilibres de Nash dans les jeux temporisés

Romain Brenguier
encadré par Patricia Bouyer et Nicolas Markey, LSV

Mars - Juillet 2009

Le contexte général

Les automates temporisés [AD90] permettent de modéliser un système où le temps s'écoule de façon continu. Ils sont utiles en vérification car beaucoup de propriétés intéressantes sont décidables sur ces modèles. Plusieurs outils ont été développés basés sur des automates temporisés. Les jeux permettent d'étudier des systèmes ouverts. Étant plongé dans un environnement, certaines actions sont contrôlés par le système et d'autres non. Le but est alors de guider ce système, c'est à dire de trouver de bonnes stratégies face aux actions imprévisibles de l'environnement. Le domaine des jeux temporisés, étudié durant ce stage, est relativement récent.

Le problème étudié

Classiquement on cherche à faire en sorte que le système satisfassent une spécification quoi que fasse l'environnement. Dans ce cas on regarde ce qu'il se passe dans le pire cas. Ce n'est pas forcément raisonnable. Le fait de donner un objectif à l'environnement permet d'affaiblir cette hypothèse. Les notions de préférence et la notion d'équilibre permettent de caractériser des stratégies à suivre dans le cas où le but de l'environnement n'est pas nécessairement opposé à celui du contrôleur. Dans le cadre générale de la théorie des jeux, plusieurs notions d'équilibres ont été proposé parmi lesquels les équilibres de Nash [Nas50] et les équilibres parfaits de sous-jeu [Sel65]. Les jeux temporisés étant une notion récente, la question des équilibres n'avait encore jamais été formulé. Nous commençons par nous intéresser aux équilibres de Nash dans le cadres des jeux temporisés.

La contribution proposée

Nous avons commencé par établir des preuves de l'indécidabilité de l'existence de ces équilibres dans des cas généraux. Lorsque les préférences associé aux jeux sont fortement quantitatives, par exemple lorsque l'on considère des jeux temporisés pondérés, l'existence d'équilibres est indécidable. Nous nous sommes basés pour ces preuves sur des constructions déjà existantes, que nous avons légèrement adaptés. Conscient de ces limitations, nous avons décidé de nous restreindre à des jeux avec des objectifs plus simples, pour lesquels nous pourrions utilisé la construction classique des régions. Le jeu obtenu par cette construction, posait deux difficultés. Il est non-déterministe et concurrent, nous avons donc procédé en deux étapes pour nous ramener à des jeux non temporisés à tours, qui sont plus simples à étudier.

Les arguments en faveur de sa validité

Les résultats que nous avons obtenus sont de deux natures. Si l'on se place dans un cas trop général, l'existence d'équilibres est indécidable. Ce résultat n'est pas surprenant au vu des résultats d'indécidabilité déjà connus pour les jeux temporisés pondérés. En revanche en se restreignant à des objectifs moins quantitatifs, nous proposons une réduction vers des jeux non temporisés à tours, qui nous permet de calculer les équilibres du jeu de départ. Nous proposons en particulier une méthode pour calculer les équilibres de Nash dans le cas de jeux temporisés avec objectifs qualitatifs.

Le bilan et les perspectives

Les travaux réalisés nous permettent de donner une nouvelle caractérisation des bonnes stratégies dans les jeux temporisés, plus général que la notion classique de stratégie gagnante, et nous donnent aussi une nouvelle manière d'appréhender la notion de stratégie gagnante dans le cadre classique des jeux temporisés en se ramenant à un jeu à tours.

Dans le prolongement de ces travaux, nous comptons nous intéresser au calcul effectif des équilibres à partir des jeux obtenus, en utilisant par exemple des techniques à base d'automates d'arbres. Nous aimerions étendre la construction avec des jeux comportant plus de deux joueurs. Et enfin, nous espérons pouvoir améliorer la réduction avec des raffinements de la construction des régions, pour pouvoir l'utiliser sur des jeux avec des objectifs un peu plus qualitatifs.

Plan du rapport

Dans la première partie nous introduisons les notions fondamentales qui seront utilisés par la suite. Dans le seconde partie nous donnons une preuve de l'indécidabilité de l'existence d'un équilibre pour les jeux temporisés pondérés. Dans la troisième partie, pour des cas plus restreint nous nous ramenons à un jeu concurrent fini, en utilisant une construction basé sur les régions. Dans la quatrième partie, nous passons de ce jeu concurrent à deux jeux concurrents déterministes. Dans la cinquième partie, nous passons de ces jeux concurrents déterministes à des jeux à tours. Enfin dans la sixième partie, nous utilisons nos résultats pour donner une méthode de calcul des équilibres, pour des jeux temporisés avec un objectif qualitatif. Par soucis d'espace certaines preuves seront laissé en annexe.

1 Préliminaires

1.1 Jeux concurrents

On commence par donner une définition de jeux concurrents, celle-ci correspond à celle que l'on trouve dans [AHK97], où l'on a ajouté la possibilité d'être non-déterministe.

Définition 1.1. Un *jeu concurrent non-déterministe* à deux joueurs est un 5-uplet $G = \langle Q, \Gamma, q_0, (m_1, m_2), E\rangle$ où

- Q est un ensemble d'états ;
- Γ est un ensemble d'actions ;
- $q_0 \in Q$ est l'état initial ;
- $m_i : Q \rightarrow (2^\Gamma \setminus \emptyset) \cup \{\perp\}$ décrit l'ensemble des actions autorisées pour le joueur i dans un état, l'action spéciale $\perp$ correspond au cas où aucune action de Γ n'est autorisée ;
- $E \subseteq Q \times ((\Gamma \cup \{\perp\}) \times (\Gamma \cup \{\perp\})) \times Q$ est la relation de transition, elle doit vérifier que $\forall q \in Q, \forall a, b \in m_1(q) \times m_2(q), \exists q' \in Q, (q, (a, b), q') \in E$.

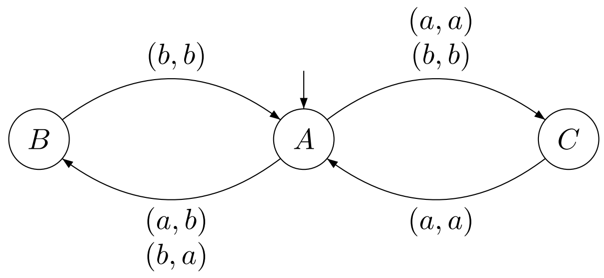
Le jeu est *déterministe* lorsque pour tout état q et actions $(a, b) \in m_1(q) \times m_2(q)$, il existe exactement un état q' tel que $(q, (a, b), q') \in E$. Le jeu est *fini* lorsque les nombres d'états et d'actions sont finis.

Dans un jeu concurrent, la transition à effectuer est choisie de façon concurrente par les deux joueurs, dans un état q chacun choisit une action possible. Un *chemin* sur le jeu G est une suite finie ou infinie d'états $(q_i)_i$ dans Q, vérifiant que pour tout i, il existe $(a_i, b_i) \in m_1(q_i) \times m_2(q_i)$ tel que $(q_i, (a_i, b_i), q_{i+1}) \in E$. On note $\mathrm{Path}(G)$ l'ensemble des chemins sur G, $(\rho)_{\leq i}$ le préfixe de taille i du chemin ρ, $(\rho)_{=i}$ l'état en position i du chemin ρ. On appellera *parties* les chemins infinis et *historiques* les chemins finis. Pour un historique h on notera $\mathrm{last}(h)$ le dernier état de h.

Exemple. Dans le jeu de l'exemple 1, $h = A \cdot B \cdot A \cdot C \cdot A$ est un historique, préfixe de taille 5 de la partie $A \cdot B \cdot (A \cdot C)^\omega$, et $\mathrm{last}(h) = A$.

Un *jeu à tours* est un jeu déterministe G où chaque état est contrôlé par un des deux joueurs, c'est à dire qu'il existe Q_1, Q_2 formant une partition de Q tel que $\forall q \in Q_1, m_2(q) = \{\perp\}$ et $\forall q \in Q_2, m_1(q) = \{\perp\}$.

Exemple 1 Un jeu concurrent



Définition 1.2. Une *stratégie* pour le joueur i est une fonction $\alpha_i : Q^+ \to \Gamma \cup \{\perp\}$ qui à chaque historique associe une action, tel que $\alpha_i(h) \in m_i(\mathrm{last}(h))$. On note $\mathrm{Strat}_i(G)$ l'ensemble des stratégies de joueur i sur G.

On dit qu'une stratégie est *sans mémoire* si l'image d'un historique h ne dépend que du dernier état $\mathrm{last}(h)$. Un *profil de stratégies* est un couple formé d'une stratégie pour le joueur 1 et d'une stratégie pour le joueur 2. Une *exécution* sur G associée à un profil de stratégies (α_1, α_2) est une partie $(q_i)_i$ sur G vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1((q_i)_{\leq k}) = a_k$ et $\alpha_2((q_i)_{\leq k}) = b_k$ et $(q_k, (a_k, b_k), q_{k+1}) \in E$. Quand le jeu n'est pas déterministe un profil de stratégies peut donner lieu à plusieurs exécutions. Si α_i est une stratégie pour le joueur i, on note $\mathrm{out}(\alpha_i)$ l'ensemble des exécutions possibles avec la stratégie α_i fixée pour le joueur i, $\mathrm{out}(\alpha_1, \alpha_2)$ l'ensemble des exécutions possibles avec les stratégies fixées pour les deux joueurs. Dans le cas où le jeu est déterministe un profil donne lieu à une seule exécution et donc $\mathrm{out}(\alpha_1, \alpha_2)$ contient exactement un élément.

Exemple. Dans le jeu de l'exemple 1 une stratégie possible est :

$$\alpha_i : \begin{cases} h \cdot A \mapsto a \\ h \cdot B \mapsto b \\ h \cdot C \mapsto a \end{cases}$$

Cette stratégie est sans mémoire. On a :

$$\mathrm{out}(\alpha_1) = \mathrm{out}(\alpha_2) = \{(A \cdot (B + C))^\omega\}$$
$$\mathrm{out}(\alpha_1, \alpha_2) = \{(A \cdot C)^\omega\}$$

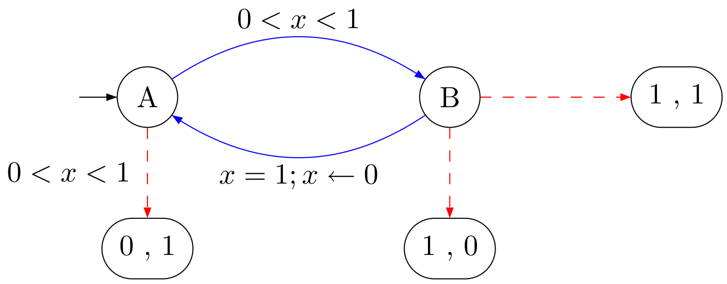
On se donne un pré-ordre $\leq_i$ pour chaque joueur i sur l'ensemble des parties de G, cette relation correspond aux préférences de chaque joueur. Cette relation peut par exemple être exprimée en associant à chaque partie un *gain* réel pour chaque joueur.

Définition 1.3. Soit G un jeu concurrent non-déterministe. On appelle *pseudo-équilibre de Nash* un profil de stratégies tel qu'une des exécutions de cette stratégie soit meilleure, pour l'ordre associé à chaque joueur, que toutes les exécutions possibles en changeant unilatéralement sa propre stratégie. Formellement (α_1, α_2) est un pseudo-équilibre de Nash si :

$$\exists \gamma \in \mathrm{out}(\alpha_1, \alpha_2) \text{ tel que } \begin{cases} \forall {\alpha_1}' \in \mathrm{Strat}_1(G), \forall \gamma' \in \mathrm{out}({\alpha_1}', \alpha_2), \gamma' \leq_1 \gamma \\ \forall {\alpha_2}' \in \mathrm{Strat}_2(G), \forall \gamma' \in \mathrm{out}(\alpha_1, {\alpha_2}'), \gamma' \leq_2 \gamma \end{cases}$$

On écrira γ_{eq} une partie vérifiant ces conditions. Cette notion étend la notion classique d'équilibre de Nash. Dans le cas où le jeu est déterministe, comme un profil de stratégies ne génère qu'une exécution, la définition correspond exactement à la définition classique d'équilibre de Nash, définie pour la première fois dans [Nas50].

Exemple 2 Un jeu temporisé



1.2 Jeux temporisés

Soit X un ensemble fini de variables, que l'on appelle *horloges*. Une *valuation* sur X est une fonction $v : X \to \mathbb{R}_+$. On note $\mathbb{R}_+^X$ l'ensemble des valuations sur X. Si $v \in \mathbb{R}_+^X$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on écrit $v + t$ la valuation qui assigne $v(x) + t$ à tout x dans X. Si $Y \subseteq X$, on note $[Y \leftarrow 0]v$ la valuation qui assigne 0 aux horloges de Y, et $v(x)$ aux horloges $x \in X \setminus Y$. Par extension, si W est un ensemble de valuations, on définit $[Y \leftarrow 0]W$ de façon naturelle. On note 0_X la valuation qui assigne 0 à toutes les horloges de X.

L'ensemble des *contraintes d'horloges* sur X, noté $\mathfrak{C}(X)$, est généré par la grammaire suivante :

$$g ::= (x \sim c) \mid g \wedge g$$

avec $x, y \in X$, $\sim \in \{<, \leq, =, \geq, >\}$, et $c \in \mathbb{N}$. On interprète les contraintes d'horloges sur une valuation $v \in \mathbb{R}_+^X$, de la façon suivante :

$$\begin{cases} v \models (x \sim c) & \text{si } v(x) \sim c \\ v \models g_1 \wedge g_2 & \text{si } v \models g_1 \text{ et } v \models g_2 \end{cases}$$

On définit $[\![g]\!] = \{v \in \mathbb{R}_+^X \mid v \models g\}$.

Définition 1.4. Un *jeu temporisé* est un 5-uplet $G = \langle X, L, l_0, E_1, E_2 \rangle$ où :
- X est un ensemble fini d'horloges,
- L est l'ensemble fini des emplacements,
- $l_0 \in L$ est l'emplacement initial,
- E_1 (resp. E_2) $\subseteq L \times \mathfrak{C}(X) \times 2^X \times L$ est l'ensemble des transitions associées au joueur 1 (resp. joueur 2).

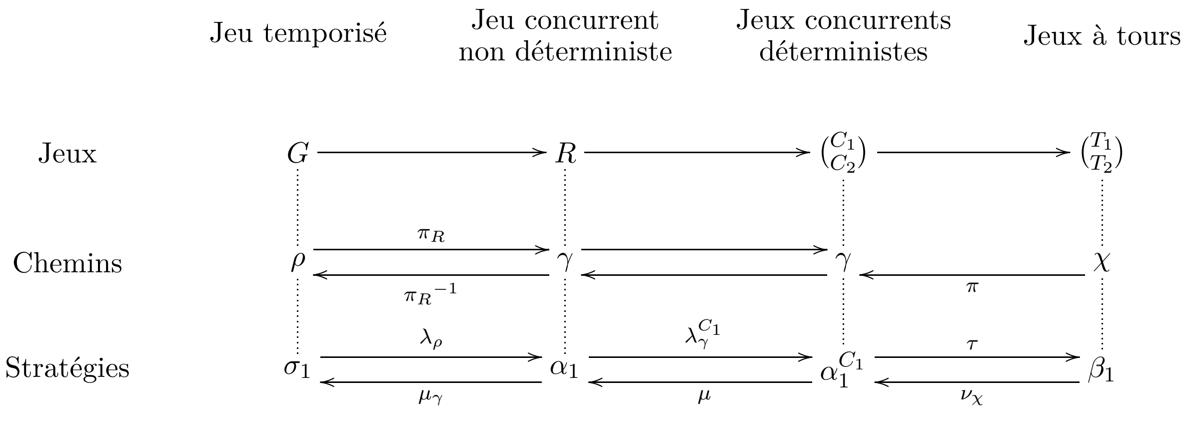
Une *configuration* (l, v) du jeu est un élément de $L \times \mathbb{R}_+^X$, formé d'un emplacement et d'une valuation des horloges. On exprime la sémantique d'un jeu temporisé comme un jeu concurrent infini où :
- $Q = L \times \mathbb{R}_+^X$, les états correspondent aux configurations du jeu temporisé,
- $q_0 = (l_0, 0_X)$ est la configuration initiale,
- $\Gamma = \mathbb{R}_+ \times E \cup \{\perp\}$, les actions correspondent aux choix d'un temps d'attente et d'une transition,
- $m_i((l, v)) = \{(t, e) \mid e = (l, g, Y, l'), v + t \in [\![g]\!]\}$ si cet ensemble n'est pas vide, $m_i((l, v)) = \{\perp\}$ sinon. Les actions autorisées sont celles respectant les contraintes sur les horloges.

On dit que le jeu est *non bloquant* si pour tout historique h, $m_1(\text{last}(h)) \neq \{\perp\}$ ou $m_2(\text{last}(h)) \neq \{\perp\}$. Dans la suite on supposera que tout les jeux considérés sont non bloquants. Notre notion de jeu temporisé est similaire à celle introduite par [dAFH$^+$03]. Les deux joueurs choisissent de façon concurrente combien de temps ils souhaitent attendre, c'est le joueur à avoir proposé le plus court délai qui détermine la transition prise. On prend la convention que dans le cas où les deux joueurs choisissent de faire une action au même moment, c'est le joueur 1 qui applique son choix. Les transitions du jeu sont donc les $((l,v),((t_1,e_1),(t_2,e_2)),(l',v'))$ tel que $e_1 = (l,g_1,Y_1,l'_1) \in E_1$, $e_2 = (l,g_2,Y_2,l'_2) \in E_2$, $(v+t_1) \in [\![g_1]\!], (v+t_2) \in [\![g_2]\!]$, et soit $t_1 \leq t_2$ et $(l',v') = (l'_1,[Y_1 \leftarrow 0](v+t_1))$, soit $t_2 < t_1$ et $(l',v') = (l'_2,[Y_2 \leftarrow 0](v+t_2))$. Le jeu ainsi définie est déterministe.

Les définitions de *chemin*, *stratégie*, *exécution* et *équilibre* découlent donc de celles présentées pour les jeux concurrents. Comme on a au plus une exécution par profil de stratégie, la définition de pseudo-équilibre coïncide avec la notion d'équilibre classique.

Remarque 1.5. Dans le cas où les deux joueurs choisissent les même délais, on pourrait faire le choix diffèrent que les transitions sont pris de façon non-déterministe. La sémantique du jeu temporisé serait alors donné par un jeu concurrent non-déterministe. Comme la notion d'équilibre de Nash ne s'applique pas dans ce cas, il nous faudrait considérer une autre notion d'équilibre, comme les pseudo-équilibres.

Dans les jeux temporisés on peut considérer des préférences basées sur une fonction de coût, on appelle ces jeux des jeu pondérés. On montre dans la section suivante que ce genre de relation de préférence rend le problème de l'existence d'équilibre de Nash indécidable. A partir de la section 3, on se restreindra à des préférences plus simples. La méthode que l'on va appliquer est la suivante : si G est un jeu temporisé à deux joueurs où l'on veut étudier les équilibres, on va se ramener à deux jeux à tours T_1 et T_2, en passant par un jeu concurrent fini R appelé jeu des régions et deux jeux concurrents finis déterministes C_1 et C_2. On définira à chaque fois des transformations pour passer des stratégies d'un jeu dans un autre.



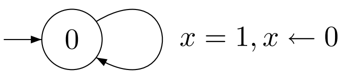


FIG. 1 – Module OK

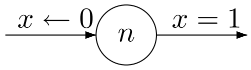


FIG. 2 – Module Add_n

2 Indécidabilité dans les jeux pondérés

Pour cette partie on considère des jeux *pondérés*. On se donne une fonction sur les états cost : $L \to \mathbb{Z}$ qui leur attribut un poids à chacun et une horloge x distingué dans X. Le coût d'une transition $(q, v) \to (q', v')$ est définit comme $\text{cost}(q) \times (v'(x) - v(x))$. Le coût accumulé d'une partie est alors $\text{cost}(\rho) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{cost}(\rho_i \to \rho_{i+1})$. La relation de préférences du joueur i peut par exemple être définit par $\rho >_i \rho' \Leftrightarrow \text{cost}(\rho) < \text{cost}(\rho')$.

On dira qu'une partie est *finie* si un seul emplacement est traversé une infinité de fois.

On notera payoff(ρ) le couple $(|\text{cost}(\rho)|, -|\text{cost}(\rho)|)$ dans le cas où ρ est finie, $(+\infty, -\infty)$ dans le cas contraire. Considérons les deux ordres suivants sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$(a', b') <_1 (a, b) \Leftrightarrow a' < a$$
$$(a', b') <_2 (a, b) \Leftrightarrow b' < b$$

Les relations de préférences que nous allons utiliser pour le reste de cette section sont définies de la façon suivante :

$$\rho <_i \rho' \Leftrightarrow \text{payoff}(\rho) <_i \text{payoff}(\rho')$$

Le but du joueur 1 est de faire durer la partie infiniment longtemps, ou à défaut de faire en sorte que le coût accumulé soit aussi éloigné que possible de 0 à la fin de la partie. Au contraire le but du joueur 2 est de s'approcher autant que possible d'un coût 0.

Le module OK met fin à une partie. Le module Add_n permet d'ajouter un entier n au poids accumulé. Dans le module Mod_ϵ, le joueur 2, qui contrôle les transitions en pointillés, a une stratégie pour s'approcher autant qu'il le veut du coût 0, mais ne peut pas l'atteindre, il n'y a pas d'équilibre de Nash dans ce jeu.

Lemme 2.1. *Pour un jeu où le joueur 2 a le choix d'aller dans Mod_ϵ au premier coup, à l'instant* 0 *:*

$$(\sigma_1, \sigma_2) \textit{ est un équilibre } \Leftrightarrow \forall \sigma'_1, \text{payoff}(\sigma'_1, \sigma_2) = (0, 0)$$

En suivant une idée similaire à [BBM06], nous allons simuler une machine à deux compteurs. Le coût accumulé va coder les valeurs des compteurs c_1 et c_2 par $E(c_1, c_2) = 5 - \frac{1}{2^{c_1} \cdot 3^{c_2}}$. On définit à partir du module générique Mod_n,

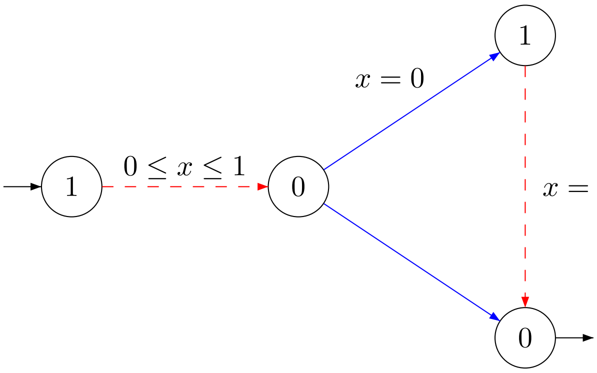


FIG. 3 – Module Mod_ϵ

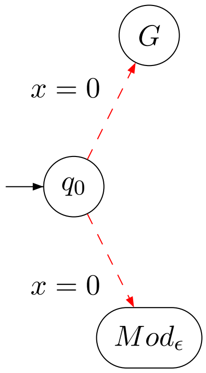


FIG. 4 – choix entre G et Mod_ϵ

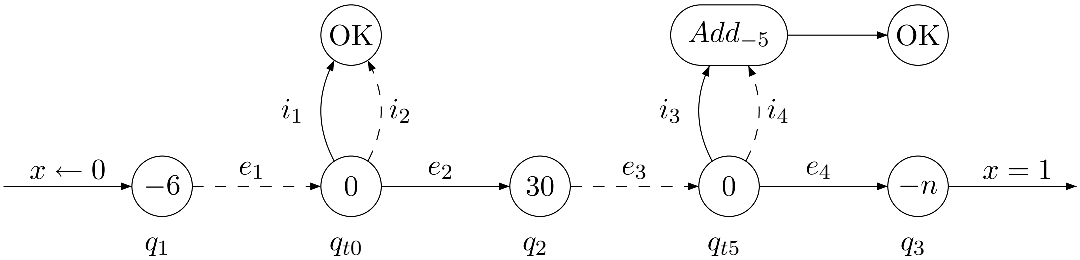


FIG. 5 – Module Mod_n

les modules : $Inc(c1) = Mod_3$ qui sert à incrémenter la valeur du compteur c_1, $Inc(c_2) = Mod_2$ qui incrémente c_2, $Dec(c_1) = Mod_{12}$ qui décrémente c_1, $Dec(c_2) = Mod_{18}$ qui décrémente c_2.

Considérons les stratégies σ_1 et σ_2 :

$$\sigma_1(h \cdot q_{t0}) = \begin{cases} (0, e_2) & \text{si } \operatorname{cost}(h) = 0 \\ (0, i_1) & \text{sinon} \end{cases} \quad \sigma_1(h \cdot t_2) = \begin{cases} (0, e_7) & \text{si } \operatorname{cost}(h) = 5 - \frac{1}{3^c} \\ (0, i_9) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\sigma_1(h \cdot q_{t5}) = \begin{cases} (0, e_4) & \text{si } \operatorname{cost}(h) = 5 \\ (0, i_3) & \text{sinon} \end{cases} \quad \sigma_1(h \cdot t_3) = \begin{cases} (0, i_{10}) & \text{si } \operatorname{cost}(h) = 5 - \frac{1}{3^c} \\ (0, e_8) & \text{sinon} \end{cases}$$

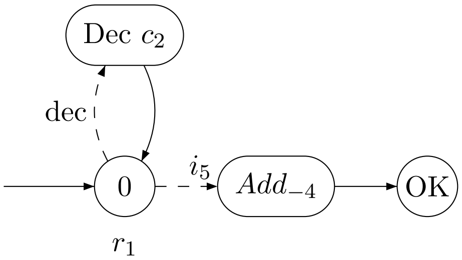


FIG. 6 – Module Test$(c_1 = 0)$

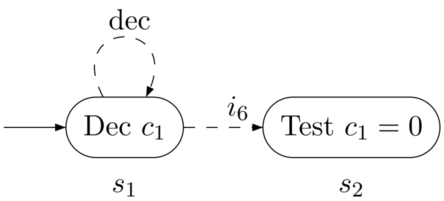


FIG. 7 – Module Test$(c_1 > 0)$

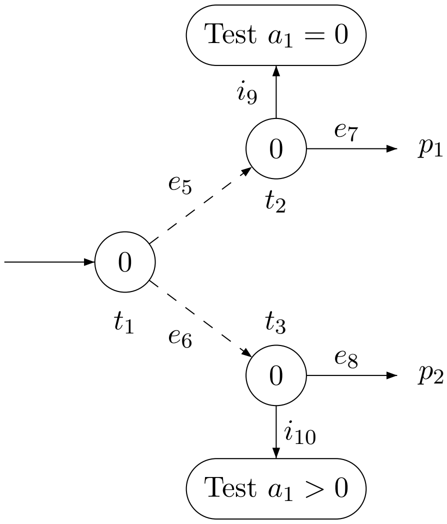


FIG. 8 – Module Cond ($c_1 = 0$)

$$\sigma_2(h \cdot q_1) = \left(\frac{\mathrm{cost}(h)}{6}, e_1\right) \qquad \sigma_2(h \cdot r_1) = \begin{cases} (0, i_5) & \text{si } \mathrm{cost}(h) = 4 \\ (0, \text{ Dec }) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\sigma_2(h \cdot q_{t0}) = (0, i_2)$$

$$\sigma_2(h \cdot q_2) = \left(\frac{5 - \mathrm{cost}(h)}{30}, e_3\right) \qquad \sigma_2(h \cdot s_1) = \begin{cases} (0, i_6) & \text{si } \mathrm{cost}(h) = 5 - \frac{1}{3^c} \\ (0, \text{ Dec }) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\sigma_2(h \cdot q_{t5}) = (0, i_4) \qquad \sigma_2(h \cdot t_1) = \begin{cases} (0, e_5) & \text{si } \mathrm{cost}(h) = 5 - \frac{1}{3^c} \\ (0, e_6) & \text{sinon} \end{cases}$$

Lemme 2.2. *En partant de la configuration $(l, 0, 5 - e)$ dans Mod_n avec $0 \leq n \cdot e \leq 30$*

- *une partie avec la stratégie σ_1 sort en OK avec un gain strictement positif ou sort de q_3 avec un coût de $5 - \frac{n \cdot e}{6}$*
- *une partie avec la stratégie σ_2 sort en OK avec un gain nul ou sort de q_3 avec un coût de $5 - \frac{n \cdot e}{6}$*

Lemme 2.3. *En partant de la configuration $(l, 0, 5 - e)$ dans $Test(c_1 = 0)$*

- *si $e = \frac{1}{3^k}$ une partie avec la stratégie σ_2 sort en OK avec un poids 0*
- *si $e \neq \frac{1}{3^k}$ toute partie sort en OK avec un poids strictement positif ou boucle infiniment*

Lemme 2.4. *En partant de la configuration $(l, 0, 5 - e)$ dans $Test(c_1 > 0)$*

- *si $e = \frac{1}{3^{k_1} \cdot 2^{k_2}}$ avec $k_2 > 0$ une partie avec la stratégie σ_2 sort en OK avec un poids 0*
- *si $e \neq \frac{1}{3^{k_1} \cdot 2^{k_2}}$ pour tout $k_2 > 0$ toute partie sort en OK avec un poids strictement positif ou boucle infiniment*

Lemme 2.5. *En partant de la configuration $(l, 0, 5 - e)$ dans $Cond(c_1 = 0)$*

- *une partie avec la stratégie σ_2 sort en OK avec un poids 0 ou avec un poids inchangé en p_1 si $e = \frac{1}{3^k}$, en p_2 si $e = \frac{1}{3^{k_1} \cdot 2^{k_2}}$ avec $k_2 > 0$*
- *une partie avec la stratégie σ_1 sort en OK avec un poids strictement positif ou boucle à l'infini , ou sort en p_1 si $e = \frac{1}{3^k}$, en p_2 si $e = \frac{1}{3^{k_1} \cdot 2^{k_2}}$ avec $k_2 > 0$*

Proposition 2.6. *L'existence d'équilibre dans les jeux temporisés pondérés à une horloge est indécidable.*

Démonstration. Soit M une machine à deux compteurs, on simule les opérations incrémentations du premier compteur (resp. second) par le module $Inc(c_1)$ (resp. $Inc(c_2)$) et les opérations de décrémentations en connectant les modules correspondants au module $Cond(c_1)$ ou $Cond(c_2)$. On place également le module Mod_ϵ au tout début du jeu en laissant le choix au joueur 2 d'y entrer ou d'aller dans les modules simulant la machine à compteurs.

Si la machine ne termine pas, par les résultats démontrés plus haut pour toutes les stratégies du joueur 2 , avec la stratégie σ_1 pour le joueur 1, soit l'exécution de la machine est correctement simulée auquel cas la partie ne termine pas et le payoff est $(+\infty, -\infty)$, soit la machine n'est pas correctement simulée et la partie se termine avec un payoff strictement positif. Ainsi $\forall \sigma'_2, \text{payoff}(\sigma_1, \sigma'_2) <_2 (0, 0)$, d'après le lemme 2.1 il ne peut pas y avoir d'équilibre

Si la machine termine, avec σ_2 la machine est correctement simulée, il n'y a donc pas de partie infinie, et si l'on termine en OK c'est avec un coût de 0. $\forall \sigma'_1, \text{payoff}(\sigma'_1, \sigma_2) = (0, 0)$ donc par le lemme 2.1, (σ_1, σ_2) est un équilibre

On a réduit l'arrêt de la machine à deux compteurs à l'existence d'un équilibre dans un jeu temporisé pondéré à une horloge. $\square$

3 Passage d'un jeu temporisé à un jeu concurrent fini

Dans le cas des jeux pondérés, nous avons montré l'indécidabilité de l'existence d'équilibre de Nash, nous allons donc maintenant nous restreindre à des préférences plus simple. Dans la suite nous supposerons que les préférences des joueurs ne dépendront que des régions traversées. Nous commençons par quelques rappels sur la notion de région dans un jeu temporisé, pour ensuite décrire la construction, basé sur les régions, que nous utilisons pour passer à un jeu concurrent fini.

3.1 Rappel sur les régions

Pour chaque horloge x, on prend une valeur $M_x \in \mathbb{N}$ représentant la plus grande valeur « pertinente » de l'horloge x, c'est à dire le plus grand entier c apparaissant dans une contrainte $x \sim c$ de G. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $\lfloor t \rfloor$ représente sa partie entière et $\text{frac}(t)$ sa partie fractionnelle.

Définition 3.1. Deux valuations d'horloges sont dites *équivalentes*, ce que l'on note $v \approx v'$, si, et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites :

- pour tout $x \in X$, soit $\lfloor v(x) \rfloor = \lfloor v'(x) \rfloor$ soit $v(x)$ et $v'(x)$ sont tout les deux plus grand que M_x ;
- pour tout $x, y \in X$ avec $v(x) \leq M_x$ et $v(y) \leq M_y$, $\text{frac}(v(x)) \leq \text{frac}(v(y))$ si et seulement si $\text{frac}(v'(x)) \leq \text{frac}(v'(y))$;

– pour tout $x \in X$ avec $v(x) \leq M_x$, $\mathrm{frac}(v(x)) = 0$ si et seulement si $\mathrm{frac}(v'(x)) = 0$.

La relation d'équivalence $\approx$ est étendue aux configurations :

$$(l, v) \approx (l', v') \text{ si et seulement si } l = l' \text{ et } v \approx v'.$$

On l'étend aussi aux chemins : $((l_i, v_i))_i \approx ((l'_i, v'_i))_i$ si et seulement si ils ont la même taille m et $\forall i \leq m, (l_i, v_i) \approx (l'_i, v'_i)$. Une classe d'équivalence pour $\approx$ est appelée une *région*. On écrit $[(l, v)]$ la région contenant (l, v), et $\mathfrak{R}$ l'ensemble (fini) de ces régions. Le *successeur immédiat* est une fonction partielle succ : $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ définie par $\mathrm{succ}(r) = r'$ si $r' \neq r$ et il existe $(l, v) \in r$ et $t \in \mathbb{R}_X$ tel que $(l, v + t) \in r'$ et $\forall 0 < t' < t$ on a $(l, v + t') \in r \cup r'$. On écrit succ^i le i-ème itéré de succ et on notera $r_1 < r_2$ s'il existe $i \in \mathbb{N}_+$ tel que $r_2 = \mathrm{succ}^i(r_1)$, on dit dans ce cas que r_2 est un successeur de r_1. On écrit aussi $r_1 \leq r_2$ si $r_1 < r_2$ ou $r_1 = r_2$. Une région r est dite *ouverte* si $\exists t \in \mathbb{R}_*, v \in r, v + t \in r$, c'est une région où l'on peut laisser s'écouler le temps.

3.2 Transformations en un jeu concurrent non-déterministe

Étant donné un jeu temporisé $G = \langle X, L, l_0, E_1, E_2 \rangle$ on définit le jeu concurrent $R = \langle Q, \Gamma, q_0, E \rangle$ appelé *jeu des régions* :

- $Q = L \times \mathfrak{R}$
- $\Gamma = (\mathfrak{R} \cup \{\iota\}) \times (E_1 \cup E_2)$
- $q_0 = [(l_0, 0_X)]$

Les actions autorisées sont les couples formés d'une transition partant de l'état courant et d'une région successeur de la région courante vérifiant les contraintes de cette transition.

$$m_1(l, r) = \{(r_1, (l, g_1, Y_1, l_1)) \in \mathfrak{R} \times E_1 \mid r \leq r_1 \wedge r_1 \subset [\![g_1]\!]\} \cup \{(\iota, (l, g_1, Y_1, l_1)) \in \{\iota\} \times E_1 \mid r \subset [\![g_1]\!]\}$$
$$m_2(l, r) = \{(r_2, (l, g_2, Y_2, l_2)) \in \mathfrak{R} \times E_2 \mid r \leq r_2 \wedge r_2 \subset [\![g_2]\!]\}$$

L'ensemble des actions autorisées est diffèrent pour les deux joueurs car comme le joueur 1 a la priorité, lorsqu'il décide de faire une transition sans délai, le joueur 2 ne peut rien faire pour l'en empêcher, c'est pour cela que l'action ι a été ajouté. La relation de transitions est définie de la manière suivante :

Transitions immédiates Lorsque le joueur 1 décide de prendre une transition sans délai, c'est nécessairement celle là qui est prise. Soit $e_1 = (l, g_1, Y_1, l_1)$ tel que $(\iota, e_1) \in m_1(l, r)$,

$$\forall a \in m_2(l, r) \text{ , alors } ((l, r), ((\iota, e_1), a), (l_1, [Y_1 \leftarrow 0]r)) \in E. \tag{1}$$

Transitions concurrentes Lorsqu'à partir d'un état les deux joueurs peuvent choisir une transition, le joueur à proposer le plus court délai a la priorité. Si $r_1, e_1 = (l, g_1, Y_1, l_1)$ tel que $(r_1, e_1) \in m_1(l, r)$, et $r_2, e_2 = (l, g_2, Y_2, l_2)$ tel que $(r_2, e_2) \in m_2(l, r)$,

$$\text{si } r_1 \leq r_2 \text{ , alors } ((l, r), ((r_1, e_1), (r_2, e_2)), (l_1, [Y_1 \leftarrow 0]r_1)) \in E; \tag{2}$$

Exemple 3 Passage d'un jeu temporisé à un jeu concurrent fini

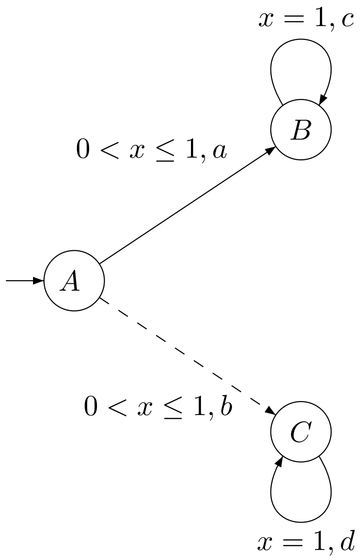


Fig. 9 – Jeu temporisé G

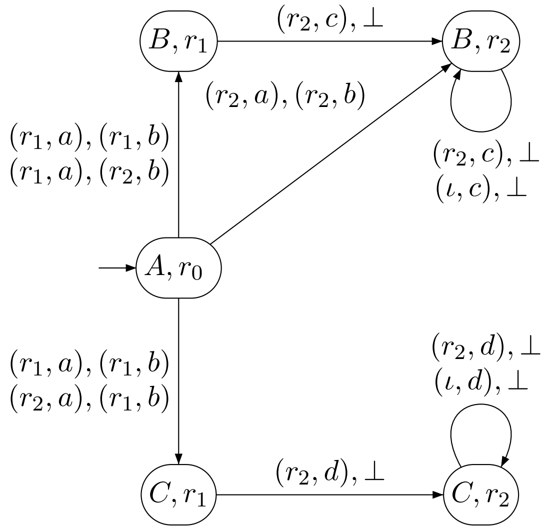


Fig. 10 – Jeu des régions R

$$\text{si } r_1 > r_2 \text{ , alors } ((l, r), ((r_1, e_1), (r_2, e_2)), (l_2, [Y_2 \leftarrow 0]r_2)) \in E; \tag{3}$$

$$\text{si } r_1 = r_2 \text{ et } r_1 \text{ ouvert, alors } ((l, r), ((r_1, e_1), (r_2, e_2)), (l_2, [Y_2 \leftarrow 0]r_2)) \in E. \tag{4}$$

Transitions à tour Quand seul un des deux joueurs a un mouvement autorisé, c'est lui qui détermine la transition a prendre.

$$\begin{array}{l} \text{si } r_1, e_1 = (l, g_1, Y_1, l_1) \text{ tel que } (r_1, e_1) \in m_1(l, r), m_2(l, r) = \{\perp\}, \\ \text{alors } ((l, r), ((r_1, e_1), \perp), (l_1, [Y_1 \leftarrow 0]r_1)) \in E; \end{array} \tag{5}$$

$$\begin{array}{l} \text{si } r_2, e_2 = (l, g_2, Y_2, l_2) \text{ tel que } (r_2, e_2) \in m_2(l, r), m_1(l, r) = \{\perp\}, \\ \text{alors } ((l, r), (\perp, (r_2, e_2)), (l_2, [Y_2 \leftarrow 0]r_2)) \in E. \end{array} \tag{6}$$

Bien que le jeu temporisé définisse un jeu concurrent infini déterministe, le jeu fini obtenu n'est pas forcement déterministe, on peut avoir deux transitions étiquetées avec les mêmes actions à cause des règles (2) et (4). Par conséquent un profil de stratégies peut donner lieu à plusieurs exécutions.

Remarque 3.2. Si on considérai les jeux où les transitions sont prises de façon non déterministe dans le cas on les deux joueurs proposent les même délais, et où l'on cherche les pseudo-équilibres, on pourrait obtenir les mêmes résultats que ceux qui vont suivre en modifiant légèrement les règles à utiliser. La règle (1) devient inutile, la règle (2) est gardé, la règle (3) devient symétrique de la précédente car les deux joueurs ont maintenant des rôles complètement symétrique, la règle (4) devient inutile car c'est un sous cas de la précédente, les règles (5) et (6) sont inchangés.

Exemple. L'exemple 3 illustre le passage d'un jeu temporisé à un jeu concurrent. Il y a une horloge : $X = \{x\}$, et la constante maximale apparaissant dans les contraintes est 1. Il y a 4 régions à considérer :

$$\begin{array}{ll} r_0 = \{x \mid x = 0\} & r_1 = \{x \mid 0 < x < 1\} \\ r_2 = \{x \mid x = 1\} & r_3 = \{x \mid x > 1\} \end{array}$$

Dans la figure 10, seul les états accessibles du jeu des régions sont représentés. Le jeu obtenu n'est pas déterministe car deux arêtes différentes sont étiquetées par $(r_1, a), (r_1, b)$.

On définit la projection des chemins du jeu temporisé sur les chemins du jeu concurrent $\pi_R((l_i, v_i)_{i \leq n}) = ([(l_i, v_i)])_{i \leq n}$.

On suppose que les relations $<_i$ dépendent seulement des régions visitées et donc on peut définir les préférences sur le jeu des régions par $\pi_R(\rho) <_i \pi_R(\rho') \Leftrightarrow \rho <_i \rho'$.

Proposition 3.3. *Il existe un équilibre de Nash dans le jeu temporisé si et seulement si il existe un pseudo-équilibre de Nash dans le jeu des régions correspondant.*

Pour démontrer la proposition, on va procéder en établissant des relations entre les stratégies dans les deux jeux.

3.2.1 Du jeu temporisé vers le jeu concurrent

On commence par définir une transformation des stratégies sur le jeu temporisé vers les stratégies sur le jeu concurrent correspondant. Cette transformation est paramétrée par une partie ρ dans le jeu G. On la notera λ_ρ.

On se donne un représentant dans le jeu temporisé, choisi arbitrairement, pour chaque historique du jeu des régions, si γ est un historique dans le jeu R, on définit ce représentant par :

$$\pi_R{}^{-1}(\gamma) = \rho' \text{ tel que } \pi_R(\rho') = \gamma.$$

Étant fixée la partie ρ, on veut choisir de manière plus spécifique ce représentant, de sorte que l'image du projeté de ρ soit exactement ρ. On note $\pi_{R_\rho}^{-1}(\gamma)$ le représentant de γ que l'on choisit, et l'on suppose que :

$$\pi_{R_\rho}^{-1}(\pi_R(h)) = h \text{ si } h \text{ est un préfixe de } \rho$$

On peut remarquer que $\pi_R(\pi_{R_\rho}^{-1}(\gamma)) = \gamma$ pour tout historique γ.

Pour un historique γ dans le jeu concurrent, la transformation d'une stratégie est définie de manière à correspondre à la stratégie dans le jeu temporisé sur le chemin représentant précédemment défini. En particulier sur le chemin dans le jeu des régions correspondant au paramètre ρ, on doit prendre les décisions qui correspondent à celles prise le long du chemin ρ. Soient σ_1 et σ_2 des stratégies pour les deux joueurs dans le jeu temporisé. On définit les stratégies

$\lambda_\rho(\sigma_1)$ et $\lambda_\rho(\sigma_2)$ dans le jeu concurrent R comme suit :

$$\lambda_\rho(\sigma_1)(\gamma) = \begin{cases} (\iota, e_1) & \text{si } \sigma_1(\pi_{R_\rho}^{-1}(\gamma)) = (0, e_1) \\ ([v+d_1], e_1) & \text{si } \sigma_1(\pi_{R_\rho}^{-1}(\gamma)) = (d_1, e_1) \text{ avec } d_1 > 0 \text{ et } \operatorname{last}(\pi_{R_\rho}^{-1}(\gamma)) = (l, v) \\ \perp & \text{si } \sigma_1(\pi_{R_\rho}^{-1}(\gamma)) = \perp \end{cases}$$

$$\lambda_\rho(\sigma_2)(\gamma) = \begin{cases} ([v+d_2], e_2) & \text{si } \sigma_2(\pi_{R_\rho}^{-1}(\gamma)) = (d_2, e_2) \text{ et } \operatorname{last}(\pi_{R_\rho}^{-1}(\gamma)) = (l, v) \\ \perp & \text{si } \sigma_1(\pi_{R_\rho}^{-1}(\gamma)) = \perp \end{cases}$$

On se donne également deux fonctions partielles, $f : \mathbb{R}^X \times \mathfrak{R} \to \mathbb{R}$ tel que pour toutes valuation v et région r, $v + f(v,r) \in r$, et f_+ tel que $v + f_+(v,r) \in r$ et $f_+(v,r) > f(v,r)$ si v est une région ouverte, $f_+(v,r) = f(v,r)$ sinon. Ces fonctions nous donnent une valeur de temps d'attente pour atteindre la région r désirée en partant d'une valuation v.

Le premier lemme établi que, étant fixée une stratégie pour un des joueurs, toute partie compatibles avec la transformation correspond a une partie qui était compatible avec la stratégie original. On obtient donc pas plus d'exécutions après transformation.

Lemme 3.4. $\operatorname{out}(\lambda_\rho(\sigma_1)) \subseteq \pi_R(\operatorname{out}(\sigma_1))$ *et* $\operatorname{out}(\lambda_\rho(\sigma_2)) \subseteq \pi_R(\operatorname{out}(\sigma_2))$

Le lemme suivant montre que la transformation définit nous permet d'obtenir la projection d'une exécution désiré particulière.

Lemme 3.5. $\rho \in \operatorname{out}(\sigma_1, \sigma_2) \Rightarrow \pi_R(\rho) \in \operatorname{out}(\lambda_\rho(\sigma_1), \lambda_\rho(\sigma_2))$

Proposition 3.6. *Soit (σ_1, σ_2) un équilibre de Nash dans G. Alors, en posant $\rho_{eq} = \operatorname{out}(\sigma_1, \sigma_2)$, $(\lambda_{\rho_{eq}}(\sigma_1), \lambda_{\rho_{eq}}(\sigma_2))$ est un pseudo-équilibre de Nash dans R.*

Démonstration. Soit $\{\rho_{eq}\} = \operatorname{out}(\sigma_1, \sigma_2)$ et supposons que (σ_1, σ_2) est un équilibre de Nash dans le jeu temporisé. Par le lemme 3.5 $\pi_R(\rho_{eq}) \in \operatorname{out}(\lambda_{\rho_{eq}}(\sigma_1), \lambda_{\rho_{eq}}(\sigma_2))$. Si $\exists \alpha_2 \in \operatorname{Strat}_2(R), \operatorname{out}(\lambda_{\rho_{eq}}(\sigma_1), \alpha_2) >_2 \pi_R(\rho_{eq})$, par le lemme 3.4 on sait $\exists \rho' \in \operatorname{out}(\sigma_1), \rho' >_2 \rho$, il y a contradiction avec le fait que (σ_1, σ_2) soit un équilibre. Ainsi, si (σ_1, σ_2) est un équilibre de Nash alors $(\lambda_{\rho_{eq}}(\sigma_1), \lambda_{\rho_{eq}}(\sigma_2))$ est un pseudo-équilibre de Nash. □

3.2.2 Du jeu concurrent vers le jeu temporisé

On va maintenant définir une transformation des stratégies dans le jeu des régions vers les stratégies du jeu temporisé. Comme précédemment cette transformation sera paramétrée par une partie γ du jeu des régions. Le paramètre γ est utile dans le cas où il y a du non déterminisme : on fait jouer d'abord le joueur qui contrôle la transition qui a été prise dans la partie γ. On définit μ_γ par :

- si $\alpha_i(\pi_R(h)) = \perp$ alors $\mu_\gamma(\alpha_i)(h) = \perp$;
- si $\alpha_i(\pi_R(h)) = (\iota, e_i)$ alors $\mu_\gamma(\alpha_i)(h) = (0, e_i)$;
- si $\pi_R(h) = \gamma_{\leq j}$, $\gamma_{=j} \xrightarrow{e} \gamma_{=j+1}$ alors
  si e est une transition qui a été obtenu par une des règles (1), (2) ou (5), c'est à dire qu'elle correspond au cas où le joueur 1 à voulu jouer plus tôt,

$\mu_\gamma(\alpha_2)(h) = (f_+(v, r_2), e_2)$ où $\alpha_2(\pi_R(h)) = (r_2, e_2)$
si e a été obtenu par une des règles (3), (4) ou (6), $\mu_\gamma(\alpha_1)(h) = (f_+(v, r_1), e_1)$ où $\alpha_1(\pi_R(h)) = (r_1, e_1)$
– sinon $\mu_\gamma(\alpha_i)(h) = (f(v, r_i), e_i)$ où $\alpha_i(\pi_R(h)) = (r_i, e_i)$.

Lemme 3.7. *La composition des deux transformations que l'on a définies est l'identité pour les stratégies sur le jeu concurrent $\lambda_\rho \circ \mu_\gamma = id$. Mais ce n'est pas le cas dans l'autre sens.*

La transformation permet d'obtenir la projection d'une exécution désiré.

Lemme 3.8. $\gamma \in \mathrm{out}(\alpha_1, \alpha_2) \Rightarrow \pi_R(\mathrm{out}(\mu_\gamma(\alpha_1), \mu_\gamma(\alpha_2))) = \gamma$

Toutes les parties compatibles avec la transformation d'une stratégie, correspondent a des parties compatible avec la stratégie de départ.

Lemme 3.9. $\pi_R(\mathrm{out}(\mu_\gamma(\alpha_1))) \subseteq \mathrm{out}(\alpha_1)$ *et* $\pi_R(\mathrm{out}(\mu_\gamma(\alpha_2))) \subseteq \mathrm{out}(\alpha_2)$

Proposition 3.10. *Si (α_1, α_2) un pseudo-équilibre de Nash, alors $(\mu_{\gamma_{eq}}(\alpha_1), \mu_{\gamma_{eq}}(\alpha_2))$ est un équilibre de Nash.*

Démonstration. Grâce au lemme 3.8, $\{\gamma_{eq}\} = \pi_R(\mathrm{out}(\mu_{\gamma_{eq}}(\alpha_1), \mu_{\gamma_{eq}}(\alpha_2)))$. Si $\exists \rho \in \mathrm{out}(\mu_{\gamma_{eq}}(\alpha_1)), \rho >_2 \gamma_{eq}$ par le lemme 3.9, $\exists \gamma' \in \mathrm{out}(\alpha_1), \gamma' = \pi_R(\rho) >_2 \gamma_{eq}$, γ_{eq} ne peut pas être un équilibre. Donc si (α_1, α_2) est un pseudo-équilibre de Nash, alors $(\mu_{\gamma_{eq}}(\alpha_1), \mu_{\gamma_{eq}}(\alpha_2))$ est un équilibre de Nash. □

4 Passage d'un jeu concurrent à deux jeux concurrents déterministes

Définition 4.1. À partir d'un jeu concurrent non-déterministe $R = \langle Q, \Gamma, q_0, (m_1, m_2), E\rangle$, on définit deux jeux concurrents déterministes $C_1 = \langle Q, \Gamma^1, q_0, (m_1^1, m_2^2), E^1\rangle$ et $C_2 = \langle Q, \Gamma^2, q_0, (m_1^1, m_2^2), E^2\rangle$. Dans chacun des deux jeux, l'un des deux joueurs aura plus de pouvoir que l'autre, dans le sens que lorsqu'il y avait du non-déterminisme c'est sa décision qui déterminera la transition à prendre. $\Gamma^1 = \Gamma^2 = (\Gamma \times \{1, 2\}) \cup \Gamma$. Les relations de transitions sont définies de la manière suivante :

– Dans le cas où l'on a du non-déterminisme, c'est à dire $(q, (a, b), q_1) \in E, (q, (a, b), q_2) \in E$ avec $q_2 \neq q_1$. Par la construction du jeu concurrent dans la partie précédente on a au plus deux transitions avec les mêmes étiquettes.

$$(q, ((a, 1), b), q_1) \in E^1 \qquad (q, (a, (b, 1)), q_1) \in E^2$$
$$(q, ((a, 2), b), q_2) \in E^1 \qquad (q, (a, (b, 2)), q_2) \in E^2$$

– Sinon si $(q, a, b, q') \in E$ alors

$$(q, ((a, 1), b), q') \in E^1 \qquad (q, (a, (b, 1)), q') \in E^2$$
$$(q, ((a, 2), b), q') \in E^1 \qquad (q, (a, (b, 2)), q') \in E^2$$

Les actions autorisées sont :

$$m_1^1(q) = \begin{cases} m_1(q) \times \{1,2\} & \text{si } \exists (q,a,b,q_1),(q,a,b,q_2) \in E, q_2 \neq q_1 \\ m_1(q) \times \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$$
$$m_2^1(q) = m_2(q)$$
$$m_1^2(q) = m_1(q)$$
$$m_2^2(q) = \begin{cases} m_2(q) \times \{1,2\} & \text{si } \exists (q,a,b,q_1),(q,a,b,q_2) \in E, q_2 \neq q_1 \\ m_2(q) \times \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit une transformation μ des stratégies du jeu C_i vers celles du jeu R, comme suit :

$$\mu(\alpha_i^{C_i})(\gamma) = a \text{ où } \alpha_i^{C_i}(\gamma) = (a, \alpha)$$
$$\mu(\alpha_{-i}^{C_i})(\gamma) = a \text{ où } \alpha_{-i}^{C_i}(\gamma) = a$$

On dit que les stratégies $\alpha_i^{C_i}$ et $\alpha_i^{C_{-i}}$ dans les jeux C_i et C_{-i} respectivement, sont communes lorsque $\mu(\alpha_i^{C_i}) = \mu(\alpha_i^{C_{-i}})$. On dit que deux profils $(\alpha_1^{C_1}, \alpha_2^{C_1})$ et $(\alpha_1^{C_2}, \alpha_2^{C_2})$ sont communs lorsque leurs exécutions donnent le même chemin et que les stratégies $\alpha_i^{C_1}$ et $\alpha_i^{C_2}$ sont communes. On dit que ces deux profils forment un équilibre commun lorsque ce sont des profils communs et qu'ils sont tout les deux des équilibres dans leurs jeux respectifs. Pour la lisibilité, on notera out_i les exécutions dans le jeu C_i.

Proposition 4.2. *Il existe un pseudo-équilibre de Nash dans le jeu concurrent non-déterministe, si, et seulement si, il existe un équilibre commun aux deux jeux déterministes.*

Soit γ une partie dans R, on définit les transformations $\lambda_\gamma^{C_1}$ et $\lambda_\gamma^{C_2}$ sur les stratégies par

– pour un préfixe $\gamma_{\leq i}$ de γ

$$\lambda_\gamma^{C_1}(\alpha_1)(\gamma_{\leq i}) = (a_1, d) \qquad \lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_1)(\gamma_{\leq i}) = a_1$$
$$\lambda_\gamma^{C_1}(\alpha_2)(\gamma_{\leq i}) = a_2 \qquad \lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_2)(\gamma_{\leq i}) = (a_2, d)$$

tel que $(\gamma_{=i}, ((a_1,d),a_2), \gamma_{=i+1}) \in E^1$ et $(\gamma_{=i}, (a_1,(a_2,d)), \gamma_{=i+1}) \in E^2$

– sinon

$$\lambda_\gamma^{C_1}(\alpha_1)(\gamma') = (\alpha_1(\gamma'), 1) \qquad \lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_1)(\gamma') = \alpha_1(\gamma')$$
$$\lambda_\gamma^{C_1}(\alpha_2)(\gamma') = \alpha_2(\gamma') \qquad \lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_2)(\gamma') = (\alpha_2(\gamma'), 1)$$

Remarque 4.3. La composition dans un sens des deux transformations est égale à l'identité :

$$\mu \circ \lambda_\gamma^{C_i} = id$$

Remarque 4.4. Dans le jeu où l'avantage est donné au joueur i, la transformation $\lambda_\gamma^{C_i}$ ne modifie pas la stratégie de l'autre joueur, et par conséquent la stratégie obtenue ne dépend pas du paramètre γ :

$$\lambda_\gamma^{C_i}(\alpha_{-i}) = \alpha_{-i} \qquad \forall \gamma, \gamma', \lambda_\gamma^{C_i}(\alpha_{-i}) = \lambda_{\gamma'}^{C_i}(\alpha_{-i})$$

Exemple 4 Passage d'un jeu concurrent à un jeu concurrent déterministe

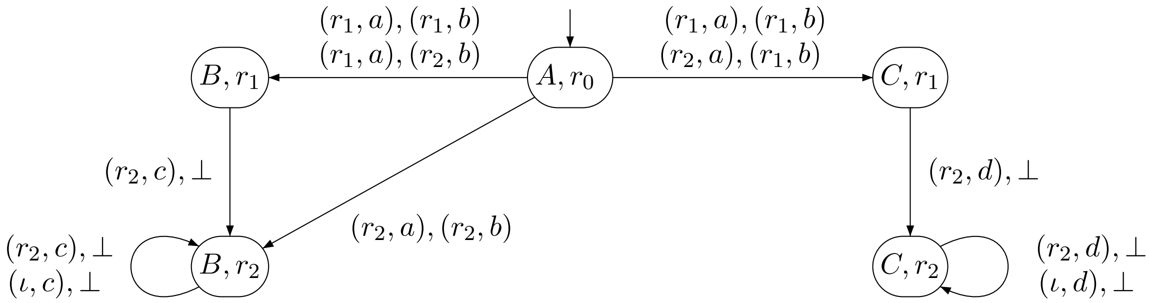


FIG. 11 – Jeu des régions R

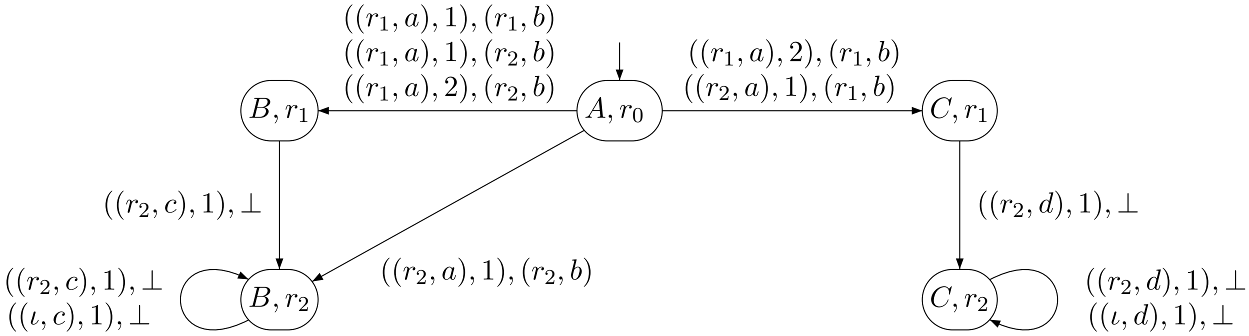


FIG. 12 – Jeu C_1

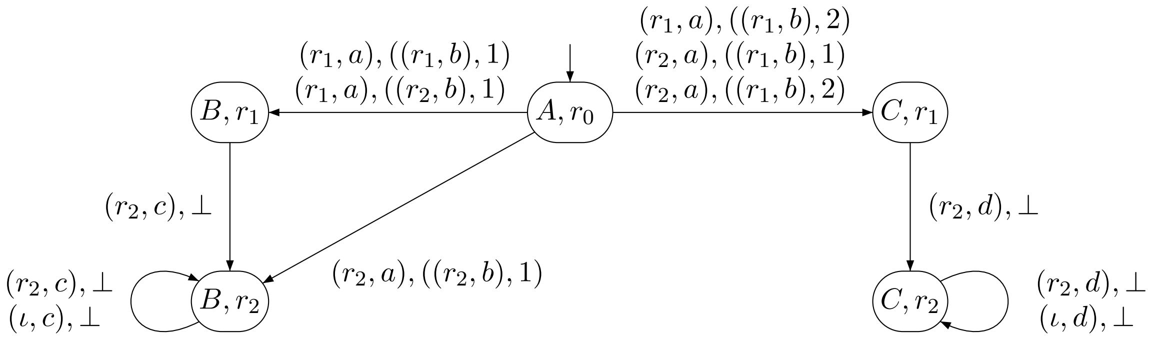


FIG. 13 – Jeu C_2

Dans le jeu des régions (A, r_0) est un point de non déterminisme, car on a deux transitions étiquetés par $(r_1, a), (r_1, b)$, on fait disparaitre ce non-déterminisme dans les jeux C_1 et C_2 en dupliquant cette transition.

Pour prouver la proposition 4.2, nous allons commencer par quelques lemmes préliminaires.

Le premier lemme montre que la transformation des stratégies du jeu des régions vers les jeux déterministes, quand elle est paramétrée par une partie du jeu, nous permet d'obtenir cette même partie.

Lemme 4.5. *Si* $\gamma \in \mathrm{out}(\alpha_1, \alpha_2)$ *alors*

$$\mathrm{out}_1(\lambda_\gamma^{C_1}(\alpha_1), \lambda_\gamma^{C_1}(\alpha_2)) = \mathrm{out}_2(\lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_1), \lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_2)) = \{\gamma\}$$

Le lemme suivant signifie qu'à l'exécution d'un profil dans un des deux jeux déterministes correspond une des exécutions possibles du profile associé dans le jeu des régions.

Lemme 4.6. $\alpha_1^{C_i}$ *(resp.* $\alpha_2^{C_i}$*) étant une stratégie du joueur* 1 *(resp. joueur* 2*) dans le jeu* C_i*, on a :*

$$\mathrm{out}_1(\alpha_1^{C_1}, \alpha_2^{C_1}) \subseteq \mathrm{out}(\mu(\alpha_1^{C_1}), \mu(\alpha_2^{C_1}))$$
$$\mathrm{out}_2(\alpha_1^{C_2}, \alpha_2^{C_2}) \subseteq \mathrm{out}(\mu(\alpha_1^{C_2}), \mu(\alpha_2^{C_2}))$$

Étant fixé une stratégie pour le joueur 1, l'ensemble des parties possibles est le même dans le jeu 2 où le deuxième joueur a l'avantage. Le joueur 2 conserve les mêmes possibilités pour changer l'issue de la partie.

Lemme 4.7. $\mathrm{out}(\alpha_1) = \mathrm{out}_2(\lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_1))$ *et* $\mathrm{out}(\alpha_2) = \mathrm{out}_1(\lambda_\gamma^{C_1}(\alpha_2))$.

Le lemme suivant illustre la même chose pour la transformation dans l'autre sens.

Lemme 4.8. $\mathrm{out}(\mu(\alpha_1^{C_2})) = \mathrm{out}_2(\alpha_1^{C_2})$ *et* $\mathrm{out}(\mu(\alpha_2^{C_1})) = \mathrm{out}_1(\alpha_2^{C_1})$.

Soit (α_1, α_2) un pseudo-équilibre dans R, γ_{eq} une exécution correspondante, par le lemme 4.5, on a $\mathrm{out}_1(\lambda_{\gamma_{eq}}^{C_1}(\alpha_1), \lambda_{\gamma_{eq}}^{C_1}(\alpha_2)) = \{\gamma_{eq}\}$. S'il existe $\alpha_1{}'$ tel que $\mathrm{out}_1(\alpha_1{}', \lambda_{\gamma_{eq}}^{C_1}(\alpha_2)) = \{\gamma\}$ avec $\gamma >_1 \gamma_{eq}$ alors par le lemme 4.7, $\exists \gamma \in \mathrm{out}(\alpha_2), \gamma >_1 \gamma_{eq}$ c'est absurde. S'il existe $\alpha_2^{C_1}$ tel que $\mathrm{out}_1(\lambda_{\gamma_{eq}}^{C_1}(\alpha_1), \alpha_2^{C_1}) = \{\gamma\}$ avec $\gamma >_2 \gamma_{eq}$ alors par le lemme 4.6, $\gamma \in \mathrm{out}(\alpha_1, \mu(\alpha_2^{C_1}))$ c'est absurde. Donc si (α_1, α_2) est un pseudo-équilibre alors $(\lambda_{\gamma_{eq}}^{C_1}(\alpha_1), \lambda_{\gamma_{eq}}^{C_1}(\alpha_2))$ est un équilibre pour le jeu C_1. De même si (α_1, α_2) est un pseudo-équilibre dans R alors $(\lambda_{\gamma_{eq}}^{C_2}(\alpha_1), \lambda_{\gamma_{eq}}^{C_2}(\alpha_2))$ est un équilibre pour le jeu C_2. Comme par la remarque 4.3, $\mu(\lambda_{\gamma_{eq}}^{C_1}(\alpha_1)) = \mu(\lambda_{\gamma_{eq}}^{C_2}(\alpha_1))$ et $\mu(\lambda_{\gamma_{eq}}^{C_1}(\alpha_2)) = \mu(\lambda_{\gamma_{eq}}^{C_2}(\alpha_2))$ c'est un équilibre commun aux deux jeux.

Soit $(\alpha_1^{C_1}, \alpha_2^{C_1}), (\alpha_1^{C_2}, \alpha_2^{C_2})$ un équilibre commun aux jeux C_1 et C_2, posons $(\alpha_1, \alpha_2) = (\mu(\alpha_1^{C_2}), \mu(\alpha_2^{C_1}))$ et $\{\gamma\} = \mathrm{out}_1(\alpha_1^{C_1}, \alpha_2^{C_1}) = \mathrm{out}_2(\alpha_1^{C_2}, \alpha_2^{C_2}) \subseteq \mathrm{out}(\alpha_1, \alpha_2)$. Si il existe α_1' et $\gamma' \in \mathrm{out}(\alpha_1{}', \mu(\alpha_2^{C_1}))$ tel que $\gamma' >_1 \gamma$ alors par le lemme 4.5, $\{\gamma'\} = \mathrm{out}_1(\lambda_{\gamma'}^{C_1}(\alpha_1{}'), \lambda_{\gamma'}^{C_1}(\alpha_2)) = \mathrm{out}_1(\lambda_{\gamma'}^{C_1}(\alpha_1{}'), \alpha_2^{C_1})$ grâce à la remarque 4.4, $\gamma' \in \mathrm{out}_1(\alpha_2^{C_1})$, $\gamma' >_1 \gamma$ est absurde. Donc si $(\alpha_1^{C_1}, \alpha_2^{C_1}), (\alpha_1^{C_2}, \alpha_2^{C_2})$ est un équilibre commun pour les jeux C_1 et C_2 alors (α_1, α_2) est un pseudo-équilibre.

5 Passage à un jeu à tour

Lemme 5.1. *Les jeux concurrents C_1 et C_2 vérifient la propriété suivante pour tout états q : l'ensemble $m_1(q) \cup m_2(q)$ des actions possibles à partir de q est munit d'un ordre total noté $>$ vérifiant les conditions suivantes :*
- $\forall a \in m_1(q), \exists q' \in Q, \forall b \in m_2(q), b > a \Rightarrow (q,(a,b),q') \in E$
- $\forall b \in m_2(q), \exists q' \in Q, \forall a \in m_1(q), a > b \Rightarrow (q,(a,b),q') \in E$

On notera $s_0(q)$ l'élément minimal de $m_1(q) \cup m_2(q)$, $\mathrm{succ}_q(a) = \min\{b \in m_1(q) \cup m_2(q) \mid b > a\}$, $s_{q_i} = \mathrm{succ}_q^i(s_0(q))$.

Définition 5.2. À partir d'un jeu concurrent C vérifiant la propriété précédente on définit un jeu à tour $T = \langle Q', \Gamma', (m'_1, m'_2), E' \rangle$. Dans chaque état on énumère les actions possibles dans l'ordre mentionné précédemment. Le joueur concerné par l'action, décide de l'effectuer ou non. Lorsqu'il décide de la faire, la propriété vérifié par l'ordre sur les actions nous assure que l'on a pas besoin de connaître la décision de l'autre joueur pour savoir dans quel état l'exécution se poursuit.
- $Q' = \{(q,s) \mid q \in Q, s \in m_i(q)\}$;
- $\Gamma' = \Gamma \cup \{\delta\}$;
- Si $s \notin m_i(q)$ alors $m'_i(q,s) = \{\bot\}$;
  si $s \in m_i(q)$ alors $s \in m'_i(q,s)$;
  si $s \in m_i(q)$ et $s \neq \max m_i(q)$ alors $\delta \in m'_i(q,s)$;
- Si $(q,(a,b),q') \in E$ et $a < b$ alors $((q,a),(a,\bot),(q',s_0(q'))) \in E'$;
  $(q,(a,b),q') \in E$ et $a > b$ alors $((q,b),(\bot,b),(q',s_0(q'))) \in E'$;
  $a \in m_1(q) \setminus \{\max m_1(q)\} \Rightarrow ((q,a),(\delta,\bot),(q,\mathrm{succ}(a))) \in E'$;
  $b \in m_2(q) \setminus \{\max m_2(q)\} \Rightarrow ((q,b),(\bot,\delta),(q,\mathrm{succ}(b))) \in E'$.

On définit une projection du jeu à tour T vers le jeu concurrent $\pi(\chi.(q,s_0)\cdots(q,s_i)) = \pi(\chi)\cdot q$. La relation de préférence dans T est donné par le relation de préférence dans le jeu concurrent sur les projections des chemins : $\chi <_i \chi' \Leftrightarrow \pi(\chi) <_i \pi(\chi')$. Pour la lisibilité, on notera out_C les exécutions dans le jeu C et out_T les exécutions dans le jeu T.

Proposition 5.3. *Il y a un équilibre de Nash dans le jeu concurrent, si, et seulement si, il y a un équilibre de Nash dans le jeu à tours.*

On définit les transformations sur les stratégies

$$\tau(\alpha_i)(\chi) = \begin{cases} a & \text{si } m_i(\mathrm{last}(\chi)) = \{a\} \\ a & \text{sinon et si } \alpha_i(\pi(\chi)) = a \text{ et } \mathrm{last}(\chi) = (q,a) \\ \delta & \text{sinon et si } \delta \in m_i(\mathrm{last}(\chi)) \end{cases}$$

$$\nu_\chi(\beta_i)(\gamma) = \begin{cases} \min\{s_j \mid \beta_i(\chi_{\leq k}\cdot(q,s_1)\cdots(q,s_j)) = s_j\} \text{ si } \exists k, \chi_{\leq k} = \pi(\gamma) \\ \min\left\{s_j \mid \exists k, \chi' \in \mathrm{out}_C(\beta_i), \pi(\chi'_{\leq k}) = \gamma \text{ et } \beta_i(\chi'_{\leq k}\cdot(q,s_1)\cdots(q,s_j)) = s_j\right\} \text{ sinon} \end{cases}$$

On montrera plus exactement que si (β_1,β_2) un équilibre, alors $(\nu_{\chi_{eq}}(\beta_1), \nu_{\chi_{eq}}(\beta_2))$ est un équilibre. Et si (α_1,α_2) est un équilibre, alors $(\tau(\alpha_1),\tau(\alpha_2))$ est un équilibre.

Le passage par le jeu à tour en utilisant ces transformations ne modifie pas la stratégie.

Lemme 5.4. $\nu_\chi \circ \tau = id$

Les parties compatibles avec la transformation d'une stratégie sont les projections de parties compatibles avec la stratégie dans le jeu à tours.

Lemme 5.5. *Si* $\chi \in \mathrm{out}_T(\beta_1)$ *alors* $\mathrm{out}_C(\nu_\chi(\beta_1)) \subseteq \pi(\mathrm{out}_T(\beta_1))$.

Les deux lemmes suivants montrent que l'on peut obtenir une exécution dans un jeu, qui correspondent à une exécution particulière dans l'autre jeu.

Lemme 5.6. *Si* $\mathrm{out}_T(\beta_1, \beta_2) = \{\chi\}$ *alors* $\mathrm{out}_C(\nu_\chi(\beta_1), \nu_\chi(\beta_2)) = \{\pi(\chi)\}$.

Lemme 5.7. $\pi(\mathrm{out}_T(\tau(\alpha_1), \tau(\alpha_2))) = \mathrm{out}_C(\alpha_1, \alpha_2)$.

Soit (α_1, α_2) un équilibre, on montre que $(\tau(\alpha_1), \tau(\alpha_2))$ est un équilibre. Posons $\{\chi\} = \mathrm{out}_T(\tau(\alpha_1), \tau(\alpha_2))$, $\{\chi'\} = \mathrm{out}_T(\tau(\alpha_1), \beta'_2)$, par le lemme 5.7, $\{\pi(\chi)\} = \mathrm{out}_C(\alpha_1, \alpha_2)$, par le lemme 5.6, $\{\pi(\chi')\} = \mathrm{out}_C(\nu_{\chi'}(\tau(\alpha_1)), \nu_{\chi'}(\beta'_2))$, en utilisant le lemme 5.4, $\{\pi(\chi')\} = \mathrm{out}_C(\alpha_1, \nu_{\chi'}(\beta'_2))$ donc $\pi(\chi') \in \mathrm{out}_C(\alpha_1)$. Si $\chi' >_2 \chi$ alors $\pi(\chi') >_2 \pi(\chi)$ absurde car le joueur 2 ne doit pas pouvoir améliorer son gain pour une stratégie de joueur 1 fixée.

Soit (β_1, β_2) un équilibre, χ tel que $\mathrm{out}_T(\beta_1, \beta_2) = \{\chi\}$. on montre que $(\nu_\chi(\beta_1), \nu_\chi(\beta_2))$ est un équilibre. Posons $\{\gamma\} = \mathrm{out}_C(\nu_\chi(\beta_1), \nu_\chi(\beta_2))$, $\{\gamma'\} = \mathrm{out}_C(\nu_\chi(\beta_1), \alpha'_2)$. Par le lemme 5.6, $\gamma = \pi(\chi)$, par le lemme 5.5, $\gamma' \in \pi(\mathrm{out}_T(\tau(\nu_\chi(\beta_1))))$, et donc par le lemme 5.4 $\gamma' \in \pi(\mathrm{out}_T(\beta_1))$. Si $\gamma' >_2 \gamma$ alors $\exists \chi' \in \mathrm{out}_T(\beta_1), \chi' >_2 \chi$ absurde car le joueur 2 ne doit pas pouvoir améliorer son gain pour une stratégie de joueur 1 fixée.

6 Cas de jeux qualitatifs

On s'intéresse aux cas où les objectifs sont qualitatifs. Les relations de préférences peuvent être définies à partir de fonctions $p_i : Q^{\mathbb{N}} \to \{0; 1\}$ tel que $\rho >_i \rho' \Leftrightarrow p_i(\rho) > p_i(\rho')$. Soit (σ_1, σ_2) un profil de stratégies, et $\{\rho\} = \mathrm{out}(\sigma_1, \sigma_2)$. On notera $\mathrm{payoff}(\rho)$ le couple $(p_1(\rho), p_2(\rho))$.

Lemme 6.1. *Si* $\mathrm{payoff}(\rho) = (1, 1)$ *alors* (σ_1, σ_2) *est un équilibre*

Lemme 6.2. *Si il y a un équilibre avec gain* $(1, 0)$ *dans le jeu* C_2*, il y en a un avec même gain dans le jeu* C_1.

Remarque 6.3. De ce lemme on peut déduire une manière de calculer les stratégies gagnantes dans le jeu temporisé, dans le cas classique où l'on considère toutes les exécutions possibles de la stratégie. En effet, on considère le jeu où le gain du joueur 2 vaut 1 si celui du joueur 1 vaut 0 et inversement. Si le joueur 1 a une stratégie gagnante dans G, associé a une stratégie du joueur 2, elle forme un équilibre $(1, 0)$, et d'après le lemme précédent il nous suffit de trouver cet équilibre dans le jeu C_2.

On introduit la notion d'*attracteur*, un état est dans attracteur d'un joueur si à partir de cette état, ce joueur possède une stratégie lui permettant d'obtenir un gain de 1 quel que soit la stratégie de l'adversaire

$$\mathrm{Attr}_1^{T_i} = \{q \in Q_i \mid \exists \beta_1^{T_i} \in \mathrm{Strat}_1(T_i), \forall \beta_2^{T_i} \in \mathrm{Strat}_2(T_i), \mathrm{payoff}(\beta_1, \beta_2) \in \{(1, 0); (1, 1)\}\}$$
$$\mathrm{Attr}_2^{T_i} = \{q \in Q_i \mid \exists \beta_2^{T_i} \in \mathrm{Strat}_2(T_i), \forall \beta_1^{T_i} \in \mathrm{Strat}_1(T_i), \mathrm{payoff}(\beta_1, \beta_2) \in \{(0, 1); (1, 1)\}\}$$

On définit également une notion complémentaire

$$\widehat{\mathrm{Attr}}_1^{T_i} = \{q \in Q_i \mid \exists \beta_1^{T_i} \in \mathrm{Strat}_1(T_i), \forall \beta_2^{T_i} \in \mathrm{Strat}_2(T_i), \mathrm{payoff}(\beta_1, \beta_2) \in \{(1,0);(0,0)\}\}$$
$$\widehat{\mathrm{Attr}}_2^{T_i} = \{q \in Q_i \mid \exists \beta_2^{T_i} \in \mathrm{Strat}_2(T_i), \forall \beta_1^{T_i} \in \mathrm{Strat}_1(T_i), \mathrm{payoff}(\beta_1, \beta_2) \in \{(0,1);(0,0)\}\}$$

Les jeux à tours à somme nulles sont déterminés [Mar75], donc

$$\mathrm{Attr}_1^{T_i} \uplus \widehat{\mathrm{Attr}}_2^{T_i} = Q_i \qquad \widehat{\mathrm{Attr}}_1^{T_i} \uplus \mathrm{Attr}_2^{T_i} = Q_i$$

Lemme 6.4. *On a un équilibre avec gain* $(0,0)$ *dans le jeu* G *si et seulement si* $(i, s_0(i)) \in \widehat{\mathrm{Attr}}_2^{T_1} \cap \widehat{\mathrm{Attr}}_1^{T_2}$ *où* i *est l'état initial de* R.

Conclusion

Le premier résultat obtenu est un résultat d'indécidabilité de l'existence des équilibres de Nash dans le cas général. Conscients de cette limitation nous nous sommes restreint à des jeux avec des objectifs plus simple, pour lesquels les relations de préférences ne dépendent que des régions traversées. Pour ces jeux, nous avons obtenu une réduction vers des jeux à tours. Il nous reste à calculer effectivement les équilibres à partir des jeux obtenus. On a vu que dans le cas purement qualitatifs, on obtient des méthodes de calcul assez simples. Dans des cas plus généraux, il faudra probablement calculer les équilibres communs, à l'aide de technique à base d'automates d'arbres par exemple. Il serait également intéressant de regarder si les résultats obtenus peuvent se généraliser à des jeux comportant plus de deux joueurs. Il paraît aussi possible d'améliorer la réduction avec des raffinements de la construction des régions. On pourrait ainsi utiliser la réduction sur des jeux avec des objectifs un plus quantitatifs. Enfin, d'autres notions d'équilibres paraissent intéressantes à étudier, comme la notion d'équilibre parfait de sous-jeu.

Références

[AD90] Rajeev Alur and David L. Dill. Automata for modeling real-time systems. In *ICALP*, pages 322–335, 1990.

[AHK97] Rajeev Alur, Thomas A. Henzinger, and Orna Kupferman. Alternating-time temporal logic. In *Proceedings of the 38th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'97)*, pages 100–109. IEEE Comp. Soc. Press, October 1997.

[BBM06] Patricia Bouyer, Thomas Brihaye, and Nicolas Markey. Improved undecidability results on weighted timed automata. *Information Processing Letters*, 98(5) :188–194, June 2006.

[dAFH+03] Luca de Alfaro, Marco Faella, Thomas A. Henzinger, Rupak Majumdar, and Mariëlle Stoelinga. The element of surprise in timed games. In Roberto Amadio and Denis Lugiez, editors, *Proceedings of the 14th International Conference on Concurrency*

Theory (CONCUR'03), volume 2761 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 142–156. Springer-Verlag, August-September 2003.

[Mar75] Donald A. Martin. Borel determinacy. *Annals of Mathematics*, 102(2) :363–371, September 1975.

[Nas50] J.F. Nash. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 36 :48–49, 1950.

[Sel65] Selten, R. Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit. *Zeitschrift fur die gesamte Staatswissenschaft*, 12 :301–324, 1965.

A Preuves des lemmes

Lemme 2.1. Pour un jeu où le joueur 2 a le choix d'aller dans Mod_ϵ au premier coup, à l'instant 0 :

$$(\sigma_1, \sigma_2) \text{ est un équilibre } \Leftrightarrow \forall \sigma_1', \text{payoff}(\sigma_1', \sigma_2) = (0, 0)$$

Démonstration. Si $\forall \sigma_1', \text{payoff}(\sigma_1', \sigma_2) = (0, 0)$ alors comme la deuxième composante du gain est toujours négative $\forall \sigma_2', \text{payoff}(\sigma_1, \sigma_2') \leq_2 (0, 0)$, on a que (σ_1, σ_2) est un équilibre.

Grâce au module Mod_ϵ $\forall \epsilon > 0, \exists \sigma_2', \text{payoff}(\sigma_1, \sigma_2') >_2 (\epsilon, -\epsilon)$ donc si (σ_1, σ_2) est un équilibre alors $\text{payoff}(\sigma_1, \sigma_2) = (0, 0)$. Comme (σ_1, σ_2) est un équilibre, $\forall \sigma_1'$ $\text{payoff}(\sigma_1', \sigma_2) \leq_1 \text{payoff}(\sigma_1, \sigma_2) = (0, 0)$ donc $\forall \sigma_1'$ $\text{payoff}(\sigma_1', \sigma_2) = (0, 0)$. □

Lemme 2.2. En partant de la configuration $(l, 0, 5 - e)$ dans Mod_n avec $0 \leq n \cdot e \leq 30$

- une partie avec la stratégie σ_1 sort en OK avec un gain strictement positif ou sort de q_3 avec un coût de $5 - \frac{n \cdot e}{6}$
- une partie avec la stratégie σ_2 sort en OK avec un gain nul ou sort de q_3 avec un coût de $5 - \frac{n \cdot e}{6}$

Démonstration. Soit σ_1' une stratégie pour joueur 1 , la partie (σ_1', σ_2) arrive en q_{t_0} avec un coût nul. Si $\sigma_1'(h) = (t, i_1)$ ou si $\sigma_1'(h) = (t, e_2)$ avec $t > 0$, alors la partie se poursuit en OK et le payoff est de $(0, 0)$. Sinon $\sigma_1'(h) = (0, e_2)$ on poursuit l'exécution avec un coût à 0 et l'horloge à $\frac{5-e}{6}$. On arrive alors q_{t_5} avec un coût à 5, si $\sigma_1'(h) = (t, i_3)$ ou si $\sigma_1'(h) = (t, e_4)$ avec $t > 0$, alors la partie se poursuit en OK et le payoff est de $(0, 0)$, sinon $\sigma_1'(h) = (0, e_4)$, on poursuit l'exécution avec un coût à 5 et l'horloge à $1 - \frac{e}{6}$. On sort ensuite de q_3 quand l'horloge est à 1, et le coût est donc à $5 - \frac{n \cdot e}{6}$

Soit σ_2' une stratégie pour joueur 2, si la partie (σ_1, σ_2') arrive en q_{t_0} avec un coût non nul alors on arrive en OK avec un poids strictement positif, sinon la partie se poursuit en q_2. Si on arrive en q_{t_5} avec un coût diffèrent de 5 on va en OK avec un payoff strictement positif, sinon l'exécution se poursuit et on sort finalement de q_3 avec un poids de $5 - \frac{n \cdot e}{6}$ □

Lemme 2.3. En partant de la configuration $(l, 0, 5 - e)$ dans $Test(c_1 = 0)$

- si $e = \frac{1}{3^k}$ une partie avec la stratégie σ_2 sort en OK avec un poids 0
- si $e \neq \frac{1}{3^k}$ toute partie sort en OK avec un payoff strictement positif ou boucle infiniment

Démonstration. Si $e = 1$ alors la partie avec σ_2 arrive directement en OK avec le poids à zéro. Sinon $e = \frac{1}{3^{k+1}}$ on passe en $Dec(c2)$ et d'après le lemme 2.2 on en sort soit en OK avec un coût égal à zéro, soit on revient avec un coût de $5 - \frac{1}{3^k}$, par récurrence on finit par arriver en OK avec un coût à 0.

Si $e \neq \frac{1}{3^k}$, si $\sigma_2'(h) = (t, e_5)$ on sort avec un payoff strictement positif, sinon $\sigma_2'(h) = (t, dec)$ par le lemme 2.2, soit on sort en OK avec un coût strictement positif, soit on revient avec coût $5 - 3 \cdot e \neq 5 - \frac{1}{3^k}$, donc les seules possibilités sans boucler infiniment sont à coût positif. $\square$

Lemme 2.4. En partant de la configuration $(l, 0, 5-e)$ dans $Test(c_1 > 0)$

- si $e = \frac{1}{3^{k_1} \cdot 2^{k_2}}$ avec $k_2 > 0$ une partie avec la stratégie σ_2 sort en OK avec un poids 0
- si $e \neq \frac{1}{3^{k_1} \cdot 2^{k_2}}$ pour tout $k_2 > 0$ toute partie sort en OK avec un poids strictement positif ou boucle infiniment

Démonstration. Si $e = \frac{1}{3^{k_1} \cdot 2^{k_2}}$ avec $k_2 > 0$, on entre en s_1 en suivant la stratégie σ_2, d'après le lemme 2.2 on en sort en OK avec un coût à zéro ou on revient en s_1 avec $e = \frac{1}{3^{k_1} \cdot 2^{k_2 - 1}}$ et $k_2 - 1 \geq 0$, par récurrence en suivant la stratégie σ_2 soit on sort en OK avec un coût 0 soit on finit par avoir $e = \frac{1}{3^{k_1}}$ et on passe en s_2, d'après le lemme 2.3 on finit par arriver en OK avec un coût 0.

Si $e \neq \frac{1}{3^{k_1} \cdot 2^{k_2}}$ pour tout $k_2 > 0$, et si la stratégie de joueur 1 est σ_1 en s_1 soit on sort avec un coût strictement positif soit on décrémente k_2, alors $e \neq \frac{1}{3^{k_1} 2^{k_2}}$ pour tout $k_2 \geq 0$, en allant en s_2 on sort avec un coût strictement positif d'après le lemme 2.3 et en restant dans s_1 on aura toujours soit cette propriété $e \neq \frac{1}{3^{k_1} 2^{k_2}}$, donc soit on boucle à l'infini soit on sort avec un coût strictement positif. $\square$

Lemme 2.5. En partant de la configuration $(l, 0, 5-e)$ dans $Cond(c_1 = 0)$

- une partie avec la stratégie σ_2 sort en OK avec un poids 0 ou avec un poids inchangé en p_1 si $e = \frac{1}{3^k}$, en p_2 si $e = \frac{1}{3^{k_1} \cdot 2^{k_2}}$ avec $k_2 > 0$
- une partie avec la stratégie σ_1 sort en OK avec un poids strictement positif ou boucle à l'infini , ou sort en p_1 si $e = \frac{1}{3^k}$, en p_2 si $e = \frac{1}{3^{k_1} \cdot 2^{k_2}}$ avec $k_2 > 0$

Démonstration. Si $e = \frac{1}{3^k}$ la stratégie σ_2 nous emmène dans l'état t_2 , joueur 1 peut ensuite aller sur le module $Test(c_1 = 0)$ et d'après le lemme 2.3 on arrive en OK avec un coût nul, sinon il sort en p_1.

Si $e = \frac{1}{3^{k_1} 2^{k_2}}$ avec $k_2 > 0$ la stratégie σ_2 nous emmène dans l'état t_3, joueur 1 peut ensuite aller sur le module $Test(c_1 > 0)$ et d'après le lemme 2.4 on arrive en OK avec un coût nul, sinon il sort en p_2.

Si on est dans l'état t_2 , avec $e \neq \frac{1}{3^k}$ ou en t_3 avec $e \neq \frac{1}{3^{k_1} \cdot 2^{k_2}}$ pour tout $k_2 > 0$ la stratégie σ_1 nous emmène sur le module de test et d'après les lemmes 2.3 et 2.4 on obtient un gain strictement positif. $\square$

Lemme 3.4. $\mathrm{out}(\lambda_\rho(\sigma_1)) \subseteq \pi_R(\mathrm{out}(\sigma_1))$ et $\mathrm{out}(\lambda_\rho(\sigma_2)) \subseteq \pi_R(\mathrm{out}(\sigma_2))$

Démonstration. Soit $\alpha_2 \in \mathrm{Strat}_2(R)$ et $\gamma \in \mathrm{out}(\lambda_\rho(\sigma_1), \alpha_2)$, on veut montrer que $\exists {\sigma_2}' \in \mathrm{Strat}_2(G), \gamma \in \pi_R(\mathrm{out}(\sigma_1, {\sigma_2}'))$. On construit la stratégie ${\sigma_2}'$ de la manière suivante, pour un historique h :

- Si $\alpha_2(\pi_R(h)) = \perp$ alors ${\sigma_2}'(h) = \perp$.
- Si $\alpha_2(\pi_R(h)) = (r, e_2)$, $\lambda_\rho(\sigma_1)(\pi_R(h)) = (r, e_1)$ et $\pi_R(h) = \gamma_{\leq i}$ alors $\gamma_{=i} \xrightarrow{(r,e_1),(r,e_2)} \gamma_{=i+1}$, cette transition a été générée soit par la règle (2) soit par la règle (4). En supposant $\sigma_1(h) = (d, e_1)$, si c'est la règle (2) on pose ${\sigma_2}' = (d_2, e_2)$ où d_2 est tel que $\mathrm{last}(h) + d_2 \in r$ et $d_2 \geq d$, sinon on

pose ${\sigma_2}' = (d_2, e_2)$ où d_2 est tel que $\mathrm{last}(h) + d_2 \in r$ et $d_2 < d$ un tel d_2 existe car dans ce cas la région est ouverte.

– Sinon ${\sigma_2}'(h) = (f(v, r_2), e_2)$ où $\alpha_2(\pi_R(h)) = (r_2, e_2)$ et $\mathrm{last}(h) = (l, v)$.

Soit $\rho' \in \mathrm{out}(\sigma_1, {\sigma_2}')$. On va montrer que $\pi_R(\rho') = \gamma$ par induction sur la longueur du chemin $\gamma_{\leq i}$. On suppose que $\pi_R(\rho'_{\leq i}) = \gamma_{\leq i}$,

– Si $\gamma_{=i} \xrightarrow{(\iota,e_1),\alpha_2} \gamma_{=i+1}$ alors cette transition a été générée par la règle (1) et $\sigma_1(\rho'_{\leq i}) = (0, e_1)$ donc $[\rho_{=i+1}] = \gamma_{=i+1}$ et $\pi_R(\rho'_{\leq i+1}) = \gamma_{\leq i+1}$.
– Si $\gamma_{=i} \xrightarrow{(r,e_1),(r,e_2)} \gamma_{=i+1}$ alors $\sigma_1(\rho'_{\leq i}) = (d_1, e_1)$, ${\sigma_2}'(\rho'_{\leq i}) = (d_2, e_2)$, avec $\gamma_{=i} + d_1 \approx \gamma_{=i} + d_2$, $d_1 > 0$. Si la transition a été générée par la règle (2) alors par définition de ${\sigma_2}'$, $d_1 \leq d_2$ et donc $\pi_R(\rho'_{\leq i+1}) = \gamma_{\leq i+1}$. De même si la transition a été générée par la règle (4) $d_2 < d_1$ et $\pi_R(\rho'_{\leq i+1}) = \gamma_{\leq i+1}$.
– Si ${\sigma_2}'(\rho'_{=i}) = \perp$ alors cette transition est générée par la règle (5) et $\alpha_2(\gamma_{\leq i}) = \perp$ donc $\pi_R(\rho'_{\leq i+1}) = \gamma_{\leq i+1}$.
– Si $\sigma_1(\rho'_{\leq i}) = \perp$ alors cette transition est générée par la règle (6) et $\lambda_\rho(\sigma_1)(\gamma_{\leq i}) = \perp$ donc $\pi_R(\rho'_{\leq i+1}) = \gamma_{\leq i+1}$.
– Si $\gamma_{=i} \xrightarrow{(r_1,e_1),(r_2,e_2)} \gamma_{=i+1}$ avec $r_1 < r_2$ alors $\sigma_1(\rho'_{\leq i}) < \sigma_2(\rho'_{\leq i})$ par la règle (2) : $\pi_R(\rho'_{\leq i+1}) = \gamma_{\leq i+1}$.
– Si $\gamma_{=i} \xrightarrow{(r_1,e_1),(r_2,e_2)} \gamma_{=i+1}$ avec $r_2 < r_1$ de même que précédemment avec la règle (3) : $\pi_R(\rho'_{\leq i+1}) = \gamma_{\leq i+1}$.

Par conséquent $\gamma \in \pi_R(\mathrm{out}(\sigma_1))$. La preuve de l'autre inclusion est similaire. □

Lemme 3.5. $\rho \in \mathrm{out}(\sigma_1, \sigma_2) \Rightarrow \pi_R(\rho) \in \mathrm{out}(\lambda_\rho(\sigma_1), \lambda_\rho(\sigma_2))$

Démonstration. On montre que pour tout i,

$$([\rho_{=i}], (\lambda_\rho(\sigma_1)(\rho_{\leq i}), \lambda_\rho(\sigma_2)(\rho_{\leq i})), [\rho_{=i+1}]) \in E.$$

– Si $\sigma_1(\rho_{\leq i}) = (d_1, a_1)$ avec $d_1 = 0$ alors $\lambda_\rho(\sigma_1)(\rho_{\leq i}) = (\iota, e_1)$, avec la règle (1) $([\rho_{=i}], (\iota, e_1), \lambda_\rho(\sigma_2)(\gamma_{\leq i}), [\rho_{=i+1}]) \in E$;
– si $\sigma_1(\rho_{\leq i}) = (d_1, a_1)$ et $\sigma_2(\rho_{\leq i}) = \perp$ alors $\lambda_\rho(\sigma_1)(\gamma_{\leq i}) = ([\rho_{=i} + d_1], e_1)$ et $\lambda_\rho(\sigma_2)(\gamma_{\leq i}) = \perp$, par la règle (5) $([\rho_{=i}], (([\rho_{=i} + d_1], e_1), \perp), [\rho_{=i+1}]) \in E$;
– si $\sigma_1(\rho_{\leq i}) = \perp$ et $\sigma_2(\rho_{\leq i}) = (d_2, e_2)$, le cas est symétrique au précédent en utilisant la règle (6) ;
– si $\sigma_1(\rho_{\leq i}) = (d_1, e_1)$ et $\sigma_2(\rho_{\leq i}) = (d_2, a_2)$, alors $\lambda_\rho(\sigma_1)(\gamma_{\leq i}) = ([\rho_{=i} + d_1], e_1)$ et $\lambda_\rho(\sigma_2)(\gamma_i) = ([\rho_{=i} + d_2], a_2)$.
  – Si $d_1 \leq d_2$, alors $\rho_{=i} \xrightarrow{e_1} \rho_{=i+1}$, on a que $[\rho_{=i} + d_1] \leq [\rho_{=i} + d_2]$, par la règle (2) $([\rho_{=i}], ([\rho_{=i} + d_1], a_1), ([\rho_{=i} + d_2], a_2), [\rho_{=i+1}]) \in E$ donc $([\rho_{=i}], \lambda_\rho(\sigma_1)(\gamma_{\leq i}), \lambda_\rho(\sigma_2)(\gamma_{\leq i}), [\rho_{=i+1}]) \in E$;
  – Si $d_2 < d_1$ alors $\rho_{=i} \xrightarrow{e_2} \rho_{=i+1}$, on a que $[\rho_{=i} + d_1] \geq [\rho_{=i} + d_2]$ et $[\rho_{=i} + d_2]$ ouvert ou $[\rho_{=i} + d_1] > [\rho_{=i} + d_2]$, dans les deux cas par les règles (3) et (4) $([\rho_{=i}], (([\rho_{=i} + d_1], e_1), ([\rho_{=i} + d_2], e_2)), [\rho_{=i+1}]) \in E$ donc $([\rho_{=i}], \lambda_\rho(\sigma_1)(\gamma_{\leq i}), \lambda_\rho(\sigma_2)(\gamma_{\leq i}), [\rho_{=i+1}]) \in E$.

On en conclut $\pi_R(\rho) \in \mathrm{out}(\lambda_\rho(\sigma_1), \lambda_\rho(\sigma_2))$. □

Lemme 3.7. La composition des deux transformations que l'on a définies est l'identité pour les stratégies sur le jeu concurrent $\lambda_\rho \circ \mu_\gamma = id$. Mais ce n'est pas le cas dans l'autre sens.

Démonstration. En effet, soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Strat}_1(R) \times \mathrm{Strat}_2(R)$, $\gamma' \in \mathrm{out}(\alpha_i)$ et $\rho' \in {\pi_{R_\rho}}^{-1}(\gamma')$,

– Si $\alpha_i(\gamma'_{\leq j}) = \bot$, alors $\mu_\gamma(\alpha_i)({\pi_{R_\rho}}^{-1}(\gamma'_{\leq j})) = \bot$ et $\lambda_\rho \circ \mu_\gamma(\alpha_i)(\gamma'_{\leq j}) = \bot$.
– si $\alpha_i(\gamma'_{\leq j}) = (\iota, e)$ alors $\mu_\gamma(\alpha_i)(\rho'_{\leq j}) = (0, e)$ et $\lambda_\rho \circ \mu_\gamma(\alpha_i)(\gamma'_{\leq j}) = (\iota, e)$.
– sinon $\alpha_i(\gamma'_{\leq j}) = (r, e)$ et alors $\mu_\gamma(\alpha_i)(\rho'_{\leq j}) = (d, e)$, $\lambda_\rho \circ \mu_\gamma(\alpha_i)(\gamma'_{\leq j}) = ([\rho'_{=j} + d], e)$. $d = f(\rho'_{=j}, r)$ où $d = f_+(\rho'_{=j}, r)$, d est tel que $[\rho'_{=j} + d] = r$, donc $\lambda_\rho \circ \mu_\gamma(\alpha_i)(\gamma'_{\leq j}) = (r, e)$.

□

Lemme 3.8. $\gamma \in \mathrm{out}(\alpha_1, \alpha_2) \Rightarrow \pi_R(\mathrm{out}(\mu_\gamma(\alpha_1), \mu_\gamma(\alpha_2))) = \gamma$

Démonstration. Preuve par induction sur le préfixe $\gamma_{\leq k}$ de γ, soit $\rho = \mathrm{out}(\mu_\gamma(\alpha_1), \mu_\gamma(\alpha_2))$, on suppose que $\gamma_{\leq k} = \pi_R(\rho_{\leq k})$, $\rho_{=k} = (l, v)$, $\gamma_{=k} = [(l, v)]$, $\gamma_{=k+1} = (l', r')$.

– Si $\alpha_1(\gamma_{\leq k}) = (\iota, e_1)$ et $\alpha_2(\gamma_{\leq k}) = (r_2, e_2)$ alors $\mu_\gamma(\alpha_1)(\rho_{\leq k}) = (0, e_1)$, $\mu_\gamma(\alpha_2)(\rho_{\leq k}) = (f(v, r_2), e_2)$, $(l, g_1, Y_1, l') \in E_1$, $\rho_{=k} \xrightarrow{(0,a_1),(f(v,r_2),e_2)} (l', [Y_1 \leftarrow 0]v)$, $[Y_1 \leftarrow 0]v \in r' = [Y_1 \leftarrow 0]r$, donc $\pi_R(\rho_{\leq k+1}) = \gamma_{\leq k+1}$;
– si $\alpha_1(\gamma_{\leq k}) = \bot$ et $\alpha_2(\gamma_{\leq k}) = (r_2, e_2)$, alors $\mu_\gamma(\alpha_1)(\rho_{\leq k}) = \bot$, $\mu_\gamma(\alpha_2)(\rho_{\leq k}) = (f(v, r_2), e_2)$, $(l, g_2, Y_2, l') \in E_2$, $\rho_{=k} \xrightarrow{\bot,(f(v,r_2),e_2)} (l', [Y_2 \leftarrow 0]v)$, $[Y_2 \leftarrow 0]v \in r' = [Y_2 \leftarrow 0]r$, donc $\pi_R(\rho_{\leq k+1}) = \gamma_{\leq k+1}$;
– si $\alpha_1(\gamma_{\leq k}) = (r_1, e_1)$, $\alpha_2(\gamma_{\leq k}) = (r_2, e_2)$, $\gamma_{=k} \xrightarrow{(r_i,e_i)} \gamma_{=k+1}$ alors $(\mu_\gamma(\alpha_{-i}))(\rho_{\leq k}) = (f_+(v, r_{-i}), e_{-i})$, $(\mu_\gamma(\alpha_i))(\rho_{\leq k}) = (f(v, r_i), e_i)$. Comme $f(v, r_i) < f_+(v, r_{-i})$, on a $\rho_{=k} \xrightarrow{(f(v,r_i),e_i),(f_+(v,r_{-i}),e_{-i})} (l', [Y_i \leftarrow 0]v)$ donc $\pi_R(\rho_{\leq k+1}) = \gamma_{\leq k+1}$.

Ceci prouve que $\gamma_{\leq k+1}$ est un préfixe de $\pi_R(\mathrm{out}(\mu_\gamma(\alpha_1), \mu_\gamma(\alpha_2)))$. □

Lemme 3.9. $\pi_R(\mathrm{out}(\mu_\gamma(\alpha_1))) \subseteq \mathrm{out}(\alpha_1)$ et $\pi_R(\mathrm{out}(\mu_\gamma(\alpha_2))) \subseteq \mathrm{out}(\alpha_2)$

Démonstration. Soit $\rho \in \mathrm{out}(\mu_\gamma(\alpha_1))$, $\exists \sigma_2 \in \mathrm{Strat}_2(G), \rho = \mathrm{out}(\mu_\gamma(\alpha_1), \sigma_2)$, par le lemme 3.5, $\pi_R(\rho) \in \mathrm{out}(\lambda_\rho(\mu_\gamma(\alpha_1)), \lambda_\rho(\mu_2))$ de plus par le lemme 3.7 $\lambda_\rho(\mu_\gamma(\alpha_1)) = \alpha_1$ donc $\pi_R(\rho) \in \mathrm{out}(\alpha_1)$ □

Lemme 4.5. Si $\gamma \in \mathrm{out}(\alpha_1, \alpha_2)$ alors

$$\mathrm{out}_1(\lambda_\gamma^{C_1}(\alpha_1), \lambda_\gamma^{C_1}(\alpha_2)) = \mathrm{out}_2(\lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_1), \lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_2)) = \{\gamma\}$$

Démonstration. Par construction de $\lambda_\gamma^{C_1}$: $(\gamma_{=i}, (\lambda_\gamma^{C_1}(\alpha_1)(\gamma_{\leq i}), \lambda_\gamma^{C_1}(\alpha_2)(\gamma_{\leq i})), \gamma_{=i+1}) \in E^1$, ceci étant valable pour tout i : $\gamma \in \mathrm{out}_1(\lambda_\gamma^{C_1}(\alpha_1), \lambda_\gamma^{C_1}(\alpha_2))$. Et comme les jeux C_1 et C_2 sont déterministes, les deux ensembles d'exécutions sont réduits au singleton $\{\gamma\}$. □

Lemme 4.6. $\alpha_1^{C_i}$ (resp. $\alpha_2^{C_i}$) étant une stratégie du joueur 1 (resp. joueur 2) dans le jeu C_i, on a :

$$\mathrm{out}_1(\alpha_1^{C_1}, \alpha_2^{C_1}) \subseteq \mathrm{out}(\mu(\alpha_1^{C_1}), \mu(\alpha_2^{C_1}))$$
$$\mathrm{out}_2(\alpha_1^{C_2}, \alpha_2^{C_2}) \subseteq \mathrm{out}(\mu(\alpha_1^{C_2}), \mu(\alpha_2^{C_2}))$$

Démonstration. Soit $\gamma \in \mathrm{out}_1(\alpha_1^{C_1}, \alpha_2^{C_1})$. Supposons $\alpha_1^{C_1}(\gamma_{\leq i}) = (a_1, d)$ et $\alpha_2^{C_1}(\gamma_{\leq i}) = a_2$, alors $\mu(\alpha_1^{C_1})(\gamma_{\leq i}) = a_1$, $\mu(\alpha_2^{C_1})(\gamma_{\leq i}) = a_2$. $(\gamma_{=i}, ((a_1, d), a_2), \gamma_{=i+1}) \in E^1$ donc par construction de E^1 : $(\gamma_{=i}, (a_1, a_2), \gamma_{=i+1}) \in E$. Ainsi pour tout i,

$$(\gamma_{=i}, (\mu(\alpha_1^{C_1})(\gamma_{\leq i}), \mu(\alpha_2^{C_1})(\gamma_{\leq i})), \gamma_{=i+1}) \in E$$

Ceci montre $\gamma \in \mathrm{out}(\mu(\alpha_1^{C_1}), \mu(\alpha_2^{C_1}))$ et prouve la première inclusion, la preuve de la deuxième se fait exactement de la même manière. □

Lemme 4.7. $\mathrm{out}(\alpha_1) = \mathrm{out}_2(\lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_1))$ et $\mathrm{out}(\alpha_2) = \mathrm{out}_1(\lambda_\gamma^{C_1}(\alpha_2))$.

Démonstration. Soit $\gamma' \in \mathrm{out}(\alpha_1)$, soit α_2 tel que $\gamma' \in \mathrm{out}(\alpha_1, \alpha_2)$. Par la remarque 4.4 $\lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_1) = \lambda_{\gamma'}^{C_2}(\alpha_1)$ et grâce au lemme 4.5

$$\mathrm{out}_2(\lambda_{\gamma'}^{C_2}(\alpha_1), \lambda_{\gamma'}^{C_2}(\alpha_2)) = \{\gamma'\}$$

Donc $\gamma' \in \mathrm{out}_2(\lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_1))$ et ainsi $\mathrm{out}(\alpha_1) \subseteq \mathrm{out}_2(\lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_1))$.

Soit $\gamma' \in \mathrm{out}_2(\lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_1))$, soit α_2 tel que $\gamma' = \mathrm{out}_2(\lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_1), \alpha_2)$. D'après le lemme 4.6 $\gamma' \in \mathrm{out}(\mu(\lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_1)), \mu(\alpha_2))$ et comme $\mu \circ \lambda_\gamma^{C_2} = id$ on a $\gamma' \in \mathrm{out}(\alpha_1)$ ce qui montre $\mathrm{out}_2(\lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_1)) \subseteq \mathrm{out}(\alpha_1)$. □

Lemme 4.8. $\mathrm{out}(\mu(\alpha_1^{C_2})) = \mathrm{out}_2(\alpha_1^{C_2})$ et $\mathrm{out}(\mu(\alpha_2^{C_1})) = \mathrm{out}_1(\alpha_2^{C_1})$.

Démonstration. Grâce au lemme 4.6, on a la première inclusion

$$\mathrm{out}_2(\alpha_1^{C_2}) \subseteq \mathrm{out}(\mu(\alpha_1^{C_2})).$$

Soit γ et α_2 tel que $\gamma \in \mathrm{out}(\mu(\alpha_1^{C_2}), \alpha_2)$. Pour tout i, $(\gamma_{=i}, (\mu(\alpha_1^{C_2})(\gamma_{\leq i}), \alpha_2(\gamma_{\leq i})), \gamma_{=i+1}) \in E$, il existe $j \in \{1, 2\}$ tel que $(\gamma_{=i}, (\mu(\alpha_1^{C_2})(\gamma_{\leq i}), (\alpha_2(\gamma_{\leq i}), j)), \gamma_{=i+1}) \in E^2$, $\lambda_\gamma^{C_2}$ est construit de manière à choisir un tel j, et comme $\alpha_1^{C_2}(\gamma_{\leq i}) = \mu(\alpha_1^{C_2})(\gamma_{\leq i})$: $(\gamma_{=i}, (\alpha_1^{C_2}(\gamma_{\leq i}), \lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_2)(\gamma_{\leq i})), \gamma_{=i+1}) \in E^2$. Ceci étant valable pour tout i, $\gamma \in \mathrm{out}_2(\alpha_1^{C_2}, \lambda_\gamma^{C_2}(\alpha_2))$. $\mathrm{out}(\mu(\alpha_1^{C})) \subseteq \mathrm{out}_2(\alpha_1^{C})$. □

Lemme 5.1. Les jeux concurrents C_1 et C_2 vérifient la propriété suivante pour tout états q :
l'ensemble $m_1(q) \cup m_2(q)$ des actions possibles à partir de q est munit d'un ordre total noté $>$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\forall a \in m_1(q), \exists q' \in Q, \forall b \in m_2(q), b > a \Rightarrow (q, (a, b), q') \in E$
- $\forall b \in m_2(q), \exists q' \in Q, \forall a \in m_1(q), a > b \Rightarrow (q, (a, b), q') \in E$

Démonstration. L'ordre a utilisé découle de l'ordre sur les régions.

– si $r_1 < r_2$ alors $((r_1, e_1), j) < (r_2, e_2)$ dans le jeu C_1 et $(r_1, e_1) < ((r_2, e_2), j)$ dans le jeu C_2 ;
– si $r_1 = r_2$ et que l'on a les transitions $(q, (a, b), q_1) \in E$ obtenu par la règle (2), $(q, (a, b), q_2) \in E$ obtenu par la règle (4) : soit j tel que $(q, ((a, j), b), q_1) \in E^1$ alors $(a, j) < b < (a, 3 - j)$ dans le jeu C_1 et $(b, 3 - j) < a < (b, j)$ dans le jeu C_2.

$\square$

Lemme 5.4. $\nu_\chi \circ \tau = id$

Démonstration. En effet $\{s_i \mid \tau(\alpha)(\chi \cdot (q, s_0) \cdots (q, s_i) = s_i\} = \{s_i \mid \alpha(\pi(\chi)) = s_i\} \cup \{\max m_1(q)\}$, donc le minimum de cet ensemble est $\alpha(\pi(\chi))$. $\nu_\chi \circ \tau(\alpha)(\gamma) = \alpha(\gamma)$. $\square$

Lemme 5.5. Si $\chi \in \text{out}_T(\beta_1)$ alors $\text{out}_C(\nu_\chi(\beta_1)) \subseteq \pi(\text{out}_T(\beta_1))$.

Démonstration. Soit γ un historique et s_i tel que $\nu_\chi(\beta_1)(\gamma) = s_i$. Il existe $\chi' \in \text{out}_C(\beta_1)$ tel que $\forall j < i, \beta_1(\chi \cdots (q, s_j)) \in \{\delta; \perp\}$ et $\beta_1(\chi \cdots (q, s_i)) = s_i$. Soit α_2 une stratégie pour le deuxième joueur dans le jeu concurrent tel que $\alpha_2(\gamma) = s_j$ et $(\gamma_{=k}, (s_i, s_j), \gamma_{=k+1}) \in E$. Si $s_i > s_j$, $(\gamma_{=k}, s_0) \xrightarrow{\delta^j} (q, s_j) \xrightarrow{s_j} (\gamma_{=k+1}, s_0)$ est compatible avec β_1. Si $s_i < s_j$, $(\gamma_{=k}, s_0) \xrightarrow{\delta^i} (q, s_i) \xrightarrow{s_i} (\gamma_{=k+1}, s_0)$ est compatible avec β_1. Donc $\gamma \in \pi(\text{out}_T(\beta_1))$. $\square$

Lemme 5.6. Si $\text{out}_T(\beta_1, \beta_2) = \{\chi\}$ alors $\text{out}_C(\nu_\chi(\beta_1), \nu_\chi(\beta_2)) = \{\pi(\chi)\}$.

Démonstration. Soit k et s_i, s_j tel que $\nu_\chi(\beta_1)(\pi(\chi_{\leq k})) = s_i, \nu_\chi(\beta_2)(\pi(\chi_{\leq k})) = s_j$. Si $i < j$ alors $\forall s < s_i, \beta_1(\chi_{\leq k} \cdots (q, s)) \in \{\delta; \perp\}$ et $\beta_2(\chi_{\leq k} \cdots (q, s)) \in \{\delta; \perp\}$, $\beta_1(\chi_{\leq k} \cdots (q, s_i)) = s_i$. En suivant le profil (β_1, β_2) à partir de $\chi_{\leq k}$: $\chi_{\leq k} \xrightarrow{\delta^i} (q, s_i) \xrightarrow{s_i} (q', s_0)$ donc $\pi(\chi_{\leq k+i+1}) = \pi(\chi_{\leq k}) \cdot q'$. $\exists s' > s_i, (q, (s_i, s'), q') \in E$ donc $(\pi(\chi)_{=k}, (s_i, s_j), \pi(\chi)_{=k+1}) \in E$. Ceci étant valable pour tout k : $\pi(\chi) \in \text{out}_C(\nu_\chi(\beta_1), \nu_\chi(\beta_2))$. $\square$

Lemme 5.7. $\pi(\text{out}_T(\tau(\alpha_1), \tau(\alpha_2))) = \text{out}_C(\alpha_1, \alpha_2)$.

Démonstration. Soit χ tel que $\{\chi\} = \text{out}_T(\tau(\alpha_1), \tau(\alpha_2))$. D'après le lemme 5.6, $\pi(\chi) = \text{out}_C(\nu_\chi \circ \tau(\alpha_1), \nu_\chi \circ \tau(\alpha_2))$, et par le lemme 5.4 $\pi(\chi) = \text{out}_C(\alpha_1, \alpha_2)$. $\square$

Lemme 6.1. Si $\text{payoff}(\rho) = (1, 1)$ alors (σ_1, σ_2) est un équilibre

Démonstration. En effet, aucun des deux joueurs ne peut améliorer son gain. $\square$

Lemme 6.2. Si il y a un équilibre avec gain $(1, 0)$ dans le jeu C_2, il y en a un avec même gain dans le jeu C_1.

Démonstration. Soit $\{\gamma\} = \mathrm{out}_2(\alpha_1^{C_2}, \alpha_2^{C_2})$ un équilibre avec $\mathrm{payoff}(\gamma) = (1, 0)$. $\gamma \in \mathrm{out}(\mu(\alpha_1^{C_2}), \mu(\alpha_2^{C_2}))$ d'après le lemme 4.6. $\gamma \in \mathrm{out}_1(\lambda_\gamma^{C_1}(\mu(\alpha_1^{C_2})), \lambda_\gamma^{C_1}(\mu(\alpha_2^{C_2})))$ d'après le lemme 4.5. Montrons que $(\lambda_\gamma^{C_1}(\mu(\alpha_1^{C_2})), \lambda_\gamma^{C_1}(\mu(\alpha_2^{C_2})))$ est un équilibre. Supposons $\exists \alpha_2^{C_1\prime}, \gamma' \in \mathrm{out}_1(\lambda_\gamma^{C_1}(\mu(\alpha_1^{C_2})), \alpha_2^{C_1\prime}), \gamma' >_2 \gamma$. D'après le lemme 4.7 $\gamma' \in \mathrm{out}(\mu(\alpha_1^{C_2}))$. Par le lemme 4.8 $\gamma' \in \mathrm{out}_2(\alpha_1^{C_2}))$, c'est absurde car le joueur 2 ne doit pas pouvoir améliorer son gain. ☐

Lemme 6.4. On a un équilibre avec gain $(0, 0)$ dans le jeu G si et seulement si $(i, s_0(i)) \in \widehat{\mathrm{Attr}}_2^{T_1} \cap \widehat{\mathrm{Attr}}_1^{T_2}$ où i est l'état initial de R.

Démonstration. Si on a un équilibre $(0, 0)$ dans le jeu temporisé, il y en a un dans le jeu T_1 donc il existe $(\beta_1^{T_1}, \beta_2^{T_1})$ avec $\mathrm{payoff} = (0, 0)$, et alors $\forall \beta_1^{T_1\prime}, \mathrm{payoff}(\beta_1^{T_1\prime}, \beta_2^{T_1}) \in \{(0, 0); (0, 1)\}$ car le joueur 1 ne doit pas pouvoir améliorer son gain. Donc $(i, s_0(i)) \in \widehat{\mathrm{Attr}}_2^{T_1}$. De façon symétrique $(i, s_0) \in \widehat{\mathrm{Attr}}_1^{T_2}$, donc $(i, s_0(i)) \in \widehat{\mathrm{Attr}}_2^{T_1} \cap \widehat{\mathrm{Attr}}_1^{T_2}$

Si $(i, s_0(i)) \in \widehat{\mathrm{Attr}}_2^{T_1} \cap \widehat{\mathrm{Attr}}_1^{T_2}$, soit $\beta_1^{T_2}$ et $\beta_2^{T_1}$ tel que $\forall \beta_2^{T_2\prime}, \mathrm{payoff}(\beta_1^{T_2}, \beta_2^{T_2\prime}) \in \{(0, 0), (1, 0)\}$ et $\forall \beta_1^{T_1\prime}, \mathrm{payoff}(\beta_1^{T_1\prime}, \beta_2^{T_1}) \in \{(0, 0), (0, 1)\}$. Soit $\chi_1 \in \mathrm{out}_{T_2}(\beta_1^{T_2})$ et $\chi_2 \in \mathrm{out}_{T_1}(\beta_2^{T_1})$, d'après le lemme 5.5, en posant $\alpha_1^{C_2} = \nu_{\chi_1}(\beta_1^{T_2})$ et $\alpha_2^{C_1} = \nu_{\chi_2}(\beta_1^{T_1})$: on a $\alpha_1^{C_2}$ et $\alpha_2^{C_1}$ tel que $\forall \alpha_2^{C_2\prime}, \mathrm{payoff}(\alpha_1^{C_2}, \alpha_2^{C_2\prime}) \in \{(0, 0), (1, 0)\}$ et $\forall \alpha_1^{C_1\prime}, \mathrm{payoff}(\alpha_1^{C_1\prime}, \alpha_2^{C_1}) \in \{(0, 0), (0, 1)\}$. Considérons le profil $(\mu(\alpha_1^{C_2}), \mu(\alpha_2^{C_1}))$, d'après le lemme 4.8, $\forall \gamma \in \mathrm{out}(\mu(\alpha_1^{C_2})), \mathrm{payoff}(\gamma) \in \{(0, 0), (1, 0)\}$, donc le joueur 2 ne peut pas améliorer son gain. La même chose est vraie pour le joueur 1 donc $(\mu(\alpha_1^{C_2}), \mu(\alpha_2^{C_1}))$ est un pseudo-équilibre avec gain $(0, 0)$. ☐

B Exemples

Exemple 5 Passage d'un jeu concurrent déterministe à un jeu à tours

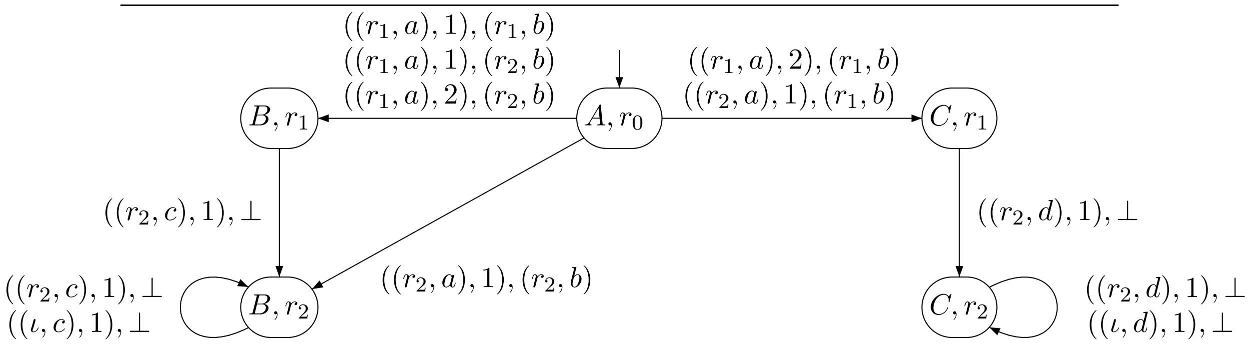


Fig. 14 – Jeu C_1

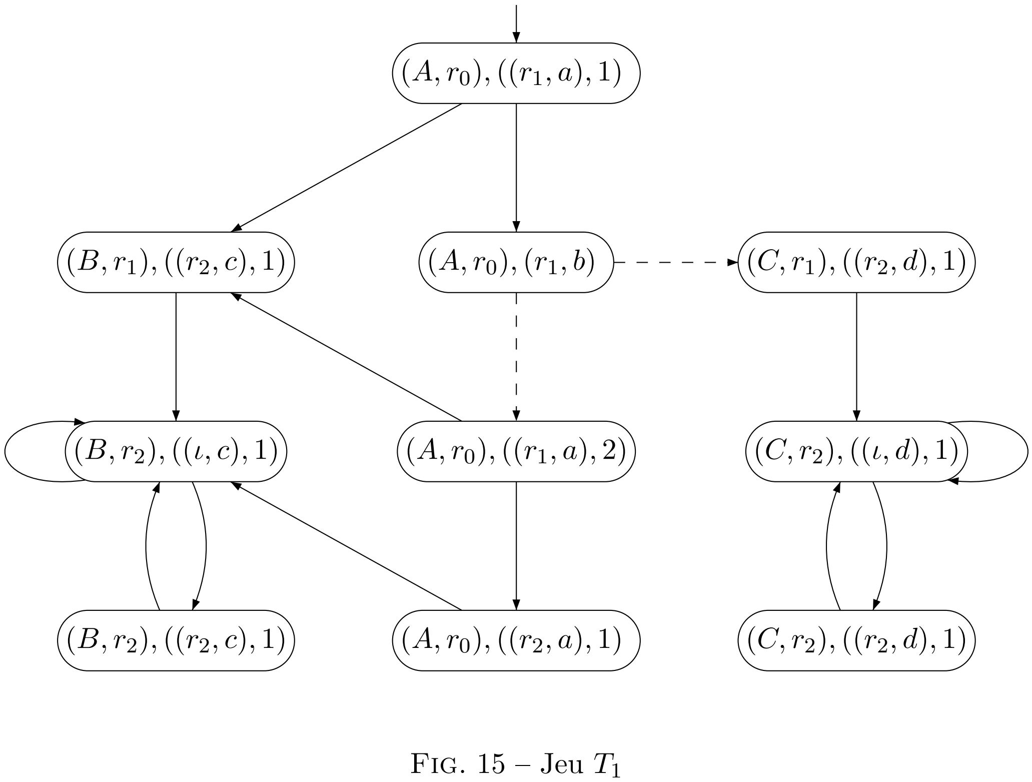


Fig. 15 – Jeu T_1

Exemple 6 Passage d'un jeu concurrent déterministe à un jeu à tours

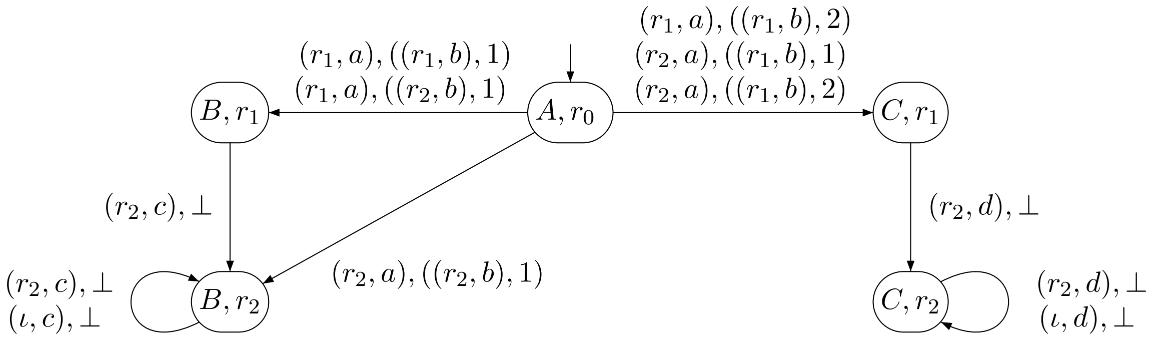


Fig. 16 – Jeu C_2

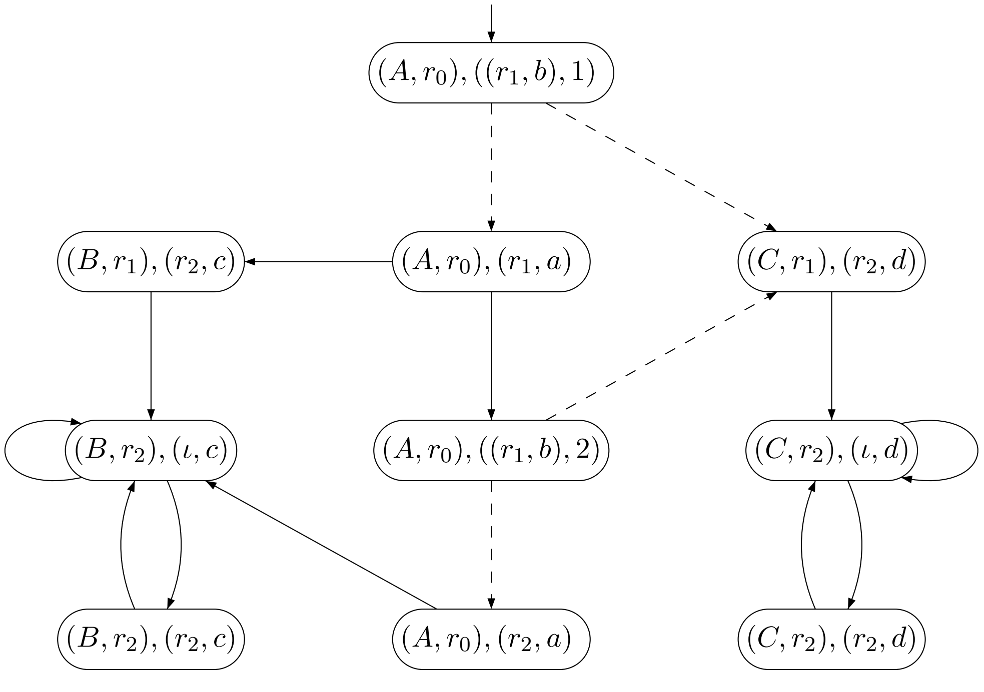


Fig. 17 – Jeu T_2