Le λ-calcul avec paire surjective.

Correction.

Le λ-calcul *avec paires surjectives* a pour termes :

$$\begin{array}{rcll} s,t,u,v,\ldots & ::= & x & \text{variables} \\ & | & \lambda x \cdot t & \text{abstractions} \\ & | & st & \text{applications} \\ & | & \langle s,t\rangle & \text{couples} \\ & | & \pi_1 s & \text{première projection} \\ & | & \pi_2 s & \text{seconde projection} \end{array}$$

Les règles de réduction sont :

$$\begin{array}{cccccccc} (\beta) & (\lambda x\cdot s)t & \to & s[x:=t] & (\pi_1) & \pi_1\langle s,t\rangle & \to & s \\ (\pi_2) & \pi_2\langle s,t\rangle & \to & t & (SP) & \langle \pi_1 s, \pi_2 s\rangle & \to & s \end{array}$$

Nous nous placerons toujours dans la suite dans le cadre du λ-calcul avec paires surjectives.

1 Confluence locale

1. Montrer que, si $s \to t$, alors les deux réduits en une étape s et $\langle \pi_1 s, \pi_2 t\rangle$, de $\langle \pi_1 s, \pi_2 s\rangle$, ont un réduit commun.

   D'un côté, s se réduit en t. De l'autre, $\langle \pi_1 s, \pi_2 t\rangle \to \langle \pi_1 t, \pi_2 t\rangle \to t$ par (SP).

2. Notons $u[v]$ un terme avec une occurrence distinguée d'un sous-terme v. (On ne distingue qu'une seule occurrence de v, même si v apparaît plusieurs fois. Si $u[v]$ est, disons, une application, alors elle est de la forme $(u_1[v])u_2$ ou $u_1(u_2[v])$, pas de la forme $(u_1[v])(u_2[v])$.) Si $u[v]$ est un rédex, qui se contracte en un terme u', et v est aussi un rédex, qui se contracte en un terme v', montrer que les deux contractés u' et $u[v']$ de $u[v]$ ont un réduit commun.

   D'abord, si $u[v] = v$, une seule règle s'applique à ce rédex, donc $u' = u[v']$. Supposons donc que v est un sous-terme strict de $u[v]$.

   On montre la proposition par analyse de cas sur la règle utilisée pour réduire $u[v]$ en u'. Si c'est la règle (SP), alors $u[v]$ est de l'une des formes : 1. $\langle v, \pi_2 u'\rangle$ avec

$v = \pi_1 u'$, et $u' = \langle v_1, v_2\rangle$, puisque v est un rédex ; ou 2. $\langle \pi_1 u', v\rangle$ avec $v = \pi_2 u'$, et $u' = \langle v_1, v_2\rangle$; ou 3. $\langle \pi_1(u_1[v]), \pi_2 u_2\rangle$; ou 4. $\langle \pi_1 u_1, \pi_2(u_2[v])\rangle$. Le cas 4. se résout grâce à la question précédente, le cas 3. est symétrique. Dans le cas 1., $v' = v_1$, donc $u[v'] = \langle v', \pi_2\langle v_1, v_2\rangle\rangle$ se réduit en $\langle v', v_2\rangle = u'$. Le cas 2. est symétrique.

Si la règle en question est (π_1), alors $u[v]$ est de la forme $\pi_1\langle s[v], t\rangle$ ou de la forme $\pi_2\langle s, t[v]\rangle$ ou de la forme $\pi_1 v$ avec $v = \langle \pi_1 v', \pi_2 v'\rangle$. Dans le premier cas, $u' = s[v]$ se réduit en $s[v']$, et $u[v'] = \pi_1\langle s[v'], t\rangle \to s[v']$. Le deuxième cas est symétrique. Dans le troisième cas, $u[v'] = \pi_1 v'$ et $u' = \pi_1 v'$, et aucune réduction n'est nécessaire.

Le cas de (π_2) est en tous points similaire.

Dans le cas de (β), $u[v]$ est de la forme $(\lambda x \cdot s[v])t$ ou $(\lambda x \cdot s)(t[v])$. Notons que $u[v]$ ne peut pas être de la forme vt, car si v est un rédex, il ne commence pas par λ, donc vt n'est pas un rédex. Dans le premier cas, où $u[v] = (\lambda x \cdot s[v])t$, $u' = s[v][x := t]$ et $u[v'] = (\lambda x \cdot s[v'])t \to s[v'][x := t]$. Or comme $v \to v'$, $v[x := t] \to v'[x := t]$, et une récurrence sur la profondeur de l'occurrence de v dans $s[v]$ montre que $u' = s[v][x := t] \to s[v'][x := t]$.

Dans le second cas, $u' = s[x := t[v]] \to^* s[x := t[v']]$. (Attention, c'est $\to^*$, pas $\to$: il y a autant d'étapes de réduction à effectuer que d'occurrences de x dans s.) D'autre part, $u[v'] = (\lambda x \cdot s)(t[v']) \to s[x := t[v']]$.

3. En déduire que le λ-calcul avec paires surjectives est localement confluent.

   On considère un terme dont on contracte deux rédex (possiblement le même). Si l'un des deux rédex est un sous-terme de l'autre, on applique la question précédente. Sinon, ils sont indépendants, c'est-à-dire que le terme est de la forme $u[v_1, v_2]$, où v_1 et v_2 sont deux rédex à deux occurrences dont aucun n'est au-dessus de l'autre. En posant v_1' le contracté de v_1 et v_2' le contracté de v_2, on vérifie que $u[v_1', v_2]$ et $u[v_1, v_2']$ admettent $u[v_1', v_2']$ comme réduit commun.

2 Non-confluence du calcul non typé

1. On rappelle que $\Theta = AA$, où $A = \lambda g, h \cdot h(ggh)$, est le combinateur de point fixe de Turing. Montrer que, comme en λ-calcul, on a $\Theta u \to^+ u(\Theta u)$.

   La démonstration est la même qu'en cours, car elle ne dépend que de la présence de la règle (β), pas des autres règles. En détail, posons $\Theta = AA$, où $A = \lambda g, h \cdot h(ggh)$, alors :

$$\begin{array}{rcl} \Theta u & = & (\lambda g, h \cdot h(ggh))Au \\ & \to^2 & u(AAu) = u(\Theta u) \end{array}$$

2. Fixons une variable z, posons $u_0 = \lambda x, y \cdot \langle \pi_1(zy), \pi_2(z(xy))\rangle$, $u_1 = \Theta u_0$, $u_2 = \Theta u_1$, $u_3 = z(u_1 u_2)$. (Les variables x et y sont distinctes entre elles, ainsi que de z.) Montrer que, pour tout terme t du calcul, $u_1 t \to^+ \langle \pi_1(zt), \pi_2(z(u_1 t))\rangle$.

Pour tout terme t, on a :

$$\begin{array}{rcl} u_1 t & = & \Theta u_0 t \\ & \to^+ & u_0(\Theta u_0)t = u_0 u_1 t \\ & \to^2 & \langle \pi_1(zt), \pi_2(z(u_1 t)) \rangle \end{array}$$

3. Montrer que $u_2 \to^+ u_3$ et $u_2 \to^+ u_1 u_3$.

$$\begin{array}{rcll} u_2 & = & \Theta u_1 & \\ & \to^+ & u_1(\Theta u_1) & \\ & \to^+ & \langle \pi_1(z(\Theta u_1)), \pi_2(z(u_1(\Theta u_1))) \rangle & \textit{(question précédente)} \\ & \to^+ & \langle \pi_1(z(u_1(\Theta u_1))), \pi_2(z(u_1(\Theta u_1))) \rangle & \textit{car } u_1 \to^+ u_1(\Theta u_1) \\ & \to & z(u_1(\Theta u_1)) \qquad (SP) & \\ & = & z(u_1 u_2) = u_3 & \end{array}$$

Ceci établit la première réduction. Pour la seconde, on réduit u_1 en $u_1(\Theta u_1)$ une fois de plus au début :

$$\begin{array}{rcl} u_2 & = & \Theta u_1 \\ & \to^+ & u_1(\Theta u_1) \\ & \to^+ & u_1(u_1(\Theta u_1)) \\ & \to^+ & u_1 u_3 \end{array}$$

en utilisant la réduction $u_1(\Theta u_1) \to^+ u_3$ montrée ci-dessus.

4. Montrer que les seules réductions partant de u_1 sont de l'une des formes :

$$\begin{array}{lll} u_1 & & \text{(réduction à } 0 \text{ étape)} \\ u_1 & \to^+ & (\lambda h \cdot h w_1) u_0 \\ u_1 & \to^+ & u_0(w_1[h := u_0]) \\ u_1 & \to^+ & u_0 w_2 \\ u_1 & \to^+ & \lambda y \cdot \langle \pi_1(zy), \pi_2(z w_3) \rangle \\ u_1 & \to^+ & \lambda y \cdot zy \end{array}$$

où w_1 est un terme tel que $\Theta h \to^* w_1$, w_2 est un terme tel que $w_1[h := u_0] \to^* w_2$, et w_3 est un terme tel que $w_2 y \to^* w_3$. Montrer de plus que la dernière réduction n'est possible que si l'on peut trouver w_1, w_2, et w_3 comme ci-dessus avec $w_3 \to^* y$.

D'abord, u_0 est en forme normale, donc la seule réduction possible depuis u_1 est dans Θ, c'est-à-dire $u_1 \to (\lambda h \cdot h(AAh))u_0 = (\lambda h \cdot h(\Theta h))u_0$. Ceci aboutit à un terme de la forme $(\lambda h \cdot h w_1) u_0$ avec w_1 un réduit de Θh.

Ensuite, avant de réduire ce dernier terme, qui est un β-rédex, on ne peut que réduire à l'intérieur de w_1, ce qui mène à un terme de la forme $(\lambda h \cdot hw_1)u_0$, avec $\Theta h \to^* w_1$ de nouveau.

Enfin, si l'on continue, on ne peut plus que contracter le β-rédex externe, ce qui aboutit à $u_0(w_1[h := u_0])$. Les seules réductions possibles ensuite avant de contracter le nouveau rédex externe sont dans $w_1[h := u_0]$, ce qui mène à des termes de la forme $u_0 w_2$ avec $w_1[h := u_0] \to^* w_2$. Si jamais l'on contracte le rédex externe $u_0 w_2 = (\lambda x, y \cdot \langle \pi_1(zy), \pi_2(z(xy))\rangle$, on obtiendra $\lambda y \cdot \langle \pi_1(zy), \pi_2(z(w_2 y))\rangle$, qui ne peut plus se réduire qu'à l'intérieur de $w_2 y$, donnant ainsi un terme de la forme $\lambda y \cdot \langle \pi_1(zy), \pi_2(zw_3)\rangle$, jusqu'au moment éventuel où w_3 se réduit en y, ce qui permet d'appliquer (SP). On obtient alors le réduit $\lambda y \cdot zy$, et uniquement dans ce cas.

5. Montrer que, si le λ-calcul avec paires surjectives est confluent, alors il n'est pas possible que $w_3 \to^* y$, sous les hypothèses de la question précédente. (Pensez à utiliser la question 2.)

   Si $w_3 \to^* y$, alors $w_2 y \to^* y$, donc $w_1[h := u_0]y \to^* y$, donc $(\Theta h)[h := u_0]y \to^* y$, c'est-à-dire $\Theta u_0 y \to^* y$, ou encore, de façon équivalente, $u_1 y \to^* y$.

   Par la question 2, $u_1 y$ se réduit aussi en $\langle \pi_1(zy), \pi_2(z(u_1 y))\rangle$, donc en $\langle \pi_1(zy), \pi_2(zy)\rangle$, puis en zy par (SP).

   Si le calcul était confluent, y et zy devraient avoir un réduit commun. Mais c'est impossible, ces deux termes étant normaux.

6. On suppose que le λ-calcul avec paires surjectives est confluent. En utilisant la question 4, simplifiée grâce au résultat de la question 5, montrer que $u_1 u_3$ ne peut se réduire en un terme de la forme zw que si u_1 se réduit en un terme $\lambda y \cdot \langle \pi_1(zy), \pi_2(zw_3)\rangle$ (où w_3 est comme à la question 4), et u_3 et $w_3[y := u_3]$ se réduisent tous les deux à w.

   Toute réduction de $u_1 u_3$ vers v_0 doit d'abord faire des réductions dans u_1 et dans u_3 indépendamment. Par la question 4, u_1 ne peut se réduire qu'en u_1, en un terme de la forme $(\lambda h \cdot hw_1)u_0$, $u_0(w_1[h := u_0])$, $u_0 w_2$, ou bien $\lambda y \cdot \langle \pi_1(zy), \pi_2(zw_3)\rangle$ — mais pas de la forme $\lambda y \cdot zy$, par la question 5. D'autre part, u_3 se réduit en un terme u'_3. La seule façon d'obtenir une forme de tête de la forme zw est donc de réduire u_1 en $\lambda y \cdot \langle \pi_1(zy), \pi_2(zw_3)\rangle$, puis de β-réduire $(\lambda y \cdot \langle \pi_1(zy), \pi_2(zw_3)\rangle)u'_3$. Ceci fournit $\langle \pi_1(zu'_3), \pi_2(z(w_3[y := u'_3]))\rangle$, où w_3 est comme à la question 4, et $u_3 \to^* u'_3$. La réduction ne peut que se poursuivre en réduisant dans u'_3 d'un côté, et dans $w_3[y := u'_3]$ de l'autre, jusqu'à ce qu'on applique (SP) pour éliminer la paire externe. Donc u'_3 et $w_3[y := u'_3]$ devront se réduire en un terme commun, qui se réduira en w. Comme $u_3 \to^* u'_3$, on en déduit que u_3 et $w_3[y := u_3]$ admettent tous les deux w comme réduit commun.

7. Montrer que, sous les hypothèses et avec les notations de la question précédente, et si zw est un réduit commun de u_3 et de $u_1 u_3$, alors w est aussi un réduit commun de u_3 et de $u_1 u_3$.

   La question précédente implique notamment que $u_3 \to^* w$. Or, toujours par la question précédente, $w_3[y := u_3] \to^* w$. On combine ceci avec le fait que $\Theta h \to^* w_1$, $w_1[h :=$

$u_0] \to^* w_2$, $w_2 y \to^* w_3$ (définition de w_3, question 4), qui implique que :

$$\begin{array}{rcll} u_1 u_3 & = & \Theta u_0 u_3 & \\ & = & (\Theta h y)[h := u_0][y := u_3] & \quad \textit{car } y \not\in \mathrm{fv}(u_0) \\ & \to^* & (w_1[h := u_0] y)[y := u_3] & \\ & \to^* & (w_2 y)[y := u_3] & \\ & \to^* & w_3[y := u_3] \to^* w & \end{array}$$

8. En conclure que le λ-calcul avec paires surjectives n'est pas confluent.

   S'il l'était, comme par la question 3 u_3 et $u_1 u_3$ sont deux réduits de u_2, u_3 et $u_1 u_3$ devraient avoir un réduit commun. Considérons un réduit commun de u_3 et de $u_1 u_3$ de taille minimale. S'il était de la forme zw, alors w en serait un plus petit, par la question précédente, contradiction. Donc aucun réduit commun de u_3 et de $u_1 u_3$ ne peut être de la forme zw. Mais ceci est impossible, car $u_3 = z(u_1 u_2)$, et les seuls réduits possibles de u_3 sont justement de la forme zw, avec $u_1 u_2 \to^* w$.

Ce contre-exemple et la preuve associée sont dus à Pierre-Louis Curien (message sur la mailing-list 'types' du 7 mars 1991). Il simplifie le contre-exemple original de Jan Willem Klop, qui requiert de passer par un théorème de standardisation pour le λ-calcul avec paires surjectives.

3 Le calcul simplement typé

Le λ-calcul avec paires surjectives *simplement typé* a pour règles de typage les habituelles :

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\,(Ax)$$

$$\frac{\Gamma, x : F \vdash u : G}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F \Rightarrow G}\,(\Rightarrow I) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash v : F}{\Gamma \vdash uv : G}\,(\Rightarrow E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u_1 : F_1 \quad \Gamma \vdash u_2 : F_2}{\Gamma \vdash \langle u_1, u_2 \rangle : F_1 \wedge F_2}\,(\wedge I) \quad \frac{\Gamma \vdash u : F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash \pi_1 u : F_1}\,(\wedge E_1) \quad \frac{\Gamma \vdash u : F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash \pi_2 u : F_2}\,(\wedge E_2)$$

1. Montrer que le λ-calcul avec paires surjectives simplement typé a la propriété d'auto-réduction : si $u \to v$ et $\Gamma \vdash u : F$ est dérivable, alors $\Gamma \vdash v : F$ est dérivable.

   Il se trouve que c'est faux.

   L'idée que j'avais étais la suivante. On démontre d'abord un lemme d'affaiblissement, par récurrence directe sur la dérivation de typage. Ceci permet de montrer que si $u \to v$ par la règle (β), et si $\Gamma \vdash u : F$ est dérivable, alors $\Gamma \vdash v : F$ est dérivable, comme *dans le cours. Le cas des règles (π_1) et (π_2) est trivial, et aussi comme dans le cours. Le cas intéressant est celui de (SP), qui revient à réécrire toute preuve de la forme :*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\,\varpi_1}{\Gamma \vdash s : F_1 \wedge F_2}}{\Gamma \vdash \pi_1 s : F_1}\,(\wedge E_1) \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\,\varpi_2}{\Gamma \vdash s : F_1 \wedge F_2}}{\Gamma \vdash \pi_2 s : F_2}\,(\wedge E_2)}{\Gamma \vdash \langle \pi_1 s, \pi_2 s\rangle : F_1 \wedge F_2}\,(\wedge I)$$

en ϖ_1, ou bien en ϖ_2.

Mais en réalité, il se peut que ϖ_1 et ϖ_2 dérivent des types différents pour s. Un contre-exemple est donné en prenant $s = (\lambda x \cdot \langle x, x\rangle)(\lambda y \cdot y)$. On peut dériver $\vdash s : (F \Rightarrow F) \wedge (F \Rightarrow F)$ pour tout type F, et ce sont les seuls typages possibles pour s dans le contexte vide. Prenons deux types distincts F_1 et F_2, alors on peut dériver :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\,\varpi_1}{\vdash s : (F_1 \Rightarrow F_1) \wedge (F_1 \Rightarrow F_1)}}{\vdash \pi_1 s : F_1 \Rightarrow F_1}\,(\wedge E_1) \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\,\varpi_2}{\vdash s : (F_2 \Rightarrow F_2) \wedge (F_2 \Rightarrow F_2)}}{\vdash \pi_2 s : F_2 \Rightarrow F_2}\,(\wedge E_2)}{\vdash \langle \pi_1 s, \pi_2 s\rangle : (F_1 \Rightarrow F_1) \wedge (F_2 \Rightarrow F_2)}\,(\wedge I)$$

mais son réduit s n'a pas le type $(F_1 \Rightarrow F_1) \wedge (F_2 \Rightarrow F_2)$: contradiction. Ce contre-exemple m'a été signalé par Flavien Breuvart et par Nathanaël Fijalkow.

2. Montrer que le λ-calcul avec paires surjectives simplement typé est fortement normalisant.

   On ne doit pas pouvoir y arriver en recodant le calcul dans un calcul qui termine : à chaque fois la règle (SP) pose problème. On est obligé de passer par une démonstration directe.

   Disons qu'un terme est neutre s'il n'est ni de la forme $\lambda x \cdot u$ ni de la forme $\langle u_1, u_2\rangle$. Posons $RED_b = SN$ pour tout type de base b, $RED_{F \Rightarrow G} = \{u \mid \forall v \in RED_F \cdot uv \in RED_G\}$, et $RED_{F_1 \wedge F_2} = \{u \mid \pi_1 u \in F_1$ et $\pi_2 u \in F_2\}$.

   On démontre (CR1), (CR2) et (CR3) comme d'habitude par récurrence sur le type. Dans le cas $F_1 \wedge F_2$, on a :

   – *(CR1) Si $u \in RED_{F_1 \wedge F_2}$, alors notamment $\pi_1 u \in RED_{F_1}$, donc $\pi_1 u \in SN$ par hypothèse de récurrence (CR1) sur F_1. Donc $u \in SN$.*
   – *(CR2) Si $u \in RED_{F_1 \wedge F_2}$ et $u \to u'$, alors $\pi_1 u \to \pi_1 u'$ et $\pi_2 u \to \pi_2 u'$, donc par hypothèse de récurrence (CR2) sur F_1 et F_2 respectivement, $\pi_1 u' \in RED_{F_1}$ et $\pi_2 u' \in RED_{F_2}$, c'est-à-dire $u' \in RED_{F_1 \wedge F_2}$.*
   – *(CR3) Si u est neutre et tous ses réduits en une étape u' sont dans $RED_{F_1 \wedge F_2}$, considérons $\pi_i u$ ($i = 1$ ou $i = 2$). Comme u est neutre, $\pi_i u$ ne peut se réduire en une étape que vers un terme de la forme $\pi_i u'$ avec $u \to u'$; par hypothèse $\pi_i u' \in RED_{F_i}$. Par hypothèse de récurrence (CR3) sur F_i, sachant que $\pi_i u$ est lui aussi neutre, on en déduit que $\pi_i u \in RED_{F_i}$. Donc $u \in RED_{F_1 \wedge F_2}$.*

On démontre aussi que : (A) si $u[x := v] \in RED_G$ pour tout $v \in RED_F$, alors $\lambda x \cdot u \in RED_{F \Rightarrow G}$. C'est exactement comme dans le cours, et servira pour la règle $(\Rightarrow I)$.

Pour la règle $(\wedge I)$, nous aurons besoin de démontrer : (B) si $u_1 \in RED_{F_1}$ et $u_2 \in RED_{F_2}$, alors $\langle u_1, u_2 \rangle \in RED_{F_1 \wedge F_2}$. Ceci se démontre par récurrence sur u_1, u_2 ordonné par le produit lexicographique de $\rightarrow^+$ avec $\rightarrow^+$, ce qui est un principe de raisonnement valide, car par (CR1) u_1 et u_2 sont dans SN. On regarde les réduits en une étape de $\pi_i\langle u_1, u_2 \rangle$. Ils sont de la forme : (a) $\pi_i\langle u'_1, u_2 \rangle$ avec $u_1 \rightarrow u'_1$, ou : (b) $\pi_i\langle u_1, u'_2 \rangle$ avec $u_2 \rightarrow u'_2$, ou : (c) u_i (par la règle (π_i)), ou : (d) $\pi_i v$, si u_1 est de la forme $\pi_1 v$ et $u_2 = \pi_2 v$ (par (SP)). Les cas (a) et (b) sont traités par hypothèse de récurrence, le cas (c) est l'hypothèse, et le cas (d) est aussi l'hypothèse, parce que $\pi_i v$ est en fait le même terme que u_i. Comme $\pi_i\langle u_1, u_2 \rangle$ est neutre, on conclut par (CR3).

Il ne reste plus qu'à montrer, comme d'habitude, que si $x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n \vdash u : F$ est dérivable, alors pour tous $v_1 \in RED_{F_1}$, ..., $v_n \in RED_{F_n}$, $u[x_1 := v_1, \ldots, x_n := v_n] \in RED_F$. Ceci est par récurrence sur la dérivation de typage. Le cas (Ax) est évident, les cas $(\Rightarrow E)$, $(\wedge E_1)$ et $(\wedge E_2)$ sont par définition de RED_F, le cas $(\Rightarrow I)$ est par (A) (comme dans le cours), et le cas $(\wedge I)$ est par (B).

En posant $v_i = x_i$ pour chaque i, ce qui fournit bien un terme de RED_{F_i} par (CR3), et en observant que tout terme de RED_F est fortement normalisant par (CR1), on en conclut que tout terme typable est fortement normalisant.

On notera que ceci est vrai, malgré le fait que le calcul n'a pas la propriété d'auto-réduction : les réductions passent parfois par des termes non typés, ou n'ayant pas le type du terme de départ.

3. Montrer que le λ-calcul avec paires surjectives simplement typé est confluent. Pourquoi ceci ne contredit-il pas le résultat de la question 8 de la partie 2 ?

En absence d'auto-réduction, la question est ambigüe. On va démontrer que si $u \rightarrow^* u_1$ et $u \rightarrow^* u_2$, et que $\Gamma \vdash u : F$ est dérivable, alors u_1 et u_2 ont un réduit commun. Mais ni u_1, ni u_2, ni u ne seront supposés typables.

On rappelle d'abord que le λ-calcul avec paires surjectives simplement typé est localement confluent (partie 1). Considérons la restriction $\rightarrow_1$ de la relation $\rightarrow$ aux termes fortement normalisants : $u \rightarrow_1 v$ ssi $u \rightarrow v$ et $u \in SN$. Notons qu'alors $v \in SN$. Puisque $\rightarrow$ est localement confluente, $\rightarrow_1$ aussi. Or $\rightarrow_1$ est fortement normalisante par construction. On peut donc appliquer le lemme de Newman et conclure que $\rightarrow_1$ est confluente.

Maintenant, si $u \rightarrow^* u_1$ et $u \rightarrow^* u_2$, et que $\Gamma \vdash u : F$ est dérivable, alors par la question précédente $u \rightarrow_1^* u_1$ et $u \rightarrow_1^* u_2$, donc il existe v tel que $u_1 \rightarrow_1^* v$ et $u_2 \rightarrow_1^* v$, d'où $u_1 \rightarrow^* v$ et $u_2 \rightarrow^* v$.

Ceci ne contredit pas la question 8 de la partie 2, qui utilise un terme u_2 qui ne termine pas, et n'est donc en particulier pas typable.