# Le $\lambda$-calcul avec paire surjective.

Le $\lambda$-calcul *avec paires surjectives* a pour termes :

$$\begin{array}{rcll} s, t, u, v, \ldots & ::= & x & \text{variables} \\ & | & \lambda x \cdot t & \text{abstractions} \\ & | & st & \text{applications} \\ & | & \langle s, t \rangle & \text{couples} \\ & | & \pi_1 s & \text{première projection} \\ & | & \pi_2 s & \text{seconde projection} \end{array}$$

Les règles de réduction sont :

$$\begin{array}{crcl@{\qquad}crcl} (\beta) & (\lambda x \cdot s)t & \to & s[x := t] & (\pi_1) & \pi_1\langle s, t\rangle & \to & s \\ (\pi_2) & \pi_2\langle s, t\rangle & \to & t & (SP) & \langle \pi_1 s, \pi_2 s\rangle & \to & s \end{array}$$

Nous nous placerons toujours dans la suite dans le cadre du $\lambda$-calcul avec paires surjectives.

## 1 Confluence locale

1. Montrer que, si $s \to t$, alors les deux réduits en une étape $s$ et $\langle \pi_1 s, \pi_2 t\rangle$, de $\langle \pi_1 s, \pi_2 s\rangle$, ont un réduit commun.
2. Notons $u[v]$ un terme avec une occurrence distinguée d'un sous-terme $v$. (On ne distingue qu'une seule occurrence de $v$, même si $v$ apparaît plusieurs fois. Si $u[v]$ est, disons, une application, alors elle est de la forme $(u_1[v])u_2$ ou $u_1(u_2[v])$, pas de la forme $(u_1[v])(u_2[v])$.) Si $u[v]$ est un rédex, qui se contracte en un terme $u'$, et $v$ est aussi un rédex, qui se contracte en un terme $v'$, montrer que les deux contractés $u'$ et $u[v']$ de $u[v]$ ont un réduit commun.
3. En déduire que le $\lambda$-calcul avec paires surjectives est localement confluent.

## 2 Non-confluence du calcul non typé

1. On rappelle que $\Theta = AA$, où $A = \lambda g, h \cdot h(ggh)$, est le combinateur de point fixe de Turing. Montrer que, comme en $\lambda$-calcul, on a $\Theta u \to^+ u(\Theta u)$.
2. Fixons une variable $z$, posons $u_0 = \lambda x, y \cdot \langle \pi_1(zy), \pi_2(z(xy))\rangle$, $u_1 = \Theta u_0$, $u_2 = \Theta u_1$, $u_3 = z(u_1 u_2)$. (Les variables $x$ et $y$ sont distinctes entre elles, ainsi que de $z$.) Montrer que, pour tout terme $t$ du calcul, $u_1 t \to^+ \langle \pi_1(zt), \pi_2(z(u_1 t))\rangle$.

3. Montrer que $u_2 \to^+ u_3$ et $u_2 \to^+ u_1 u_3$.
4. Montrer que les seules réductions partant de $u_1$ sont de l'une des formes :

$$\begin{array}{lll} u_1 & & \text{(réduction à } 0 \text{ étape)} \\ u_1 & \to^+ & (\lambda h \cdot h w_1) u_0 \\ u_1 & \to^+ & u_0(w_1[h := u_0]) \\ u_1 & \to^+ & u_0 w_2 \\ u_1 & \to^+ & \lambda y \cdot \langle \pi_1(zy), \pi_2(z w_3) \rangle \\ u_1 & \to^+ & \lambda y \cdot zy \end{array}$$

   où $w_1$ est un terme tel que $\Theta h \to^* w_1$, $w_2$ est un terme tel que $w_1[h := u_0] \to^* w_2$, et $w_3$ est un terme tel que $w_2 y \to^* w_3$. Montrer de plus que la dernière réduction n'est possible que si l'on peut trouver $w_1$, $w_2$, et $w_3$ comme ci-dessus avec $w_3 \to^* y$.
5. Montrer que, si le $\lambda$-calcul avec paires surjectives est confluent, alors il n'est pas possible que $w_3 \to^* y$, sous les hypothèses de la question précédente. (Pensez à utiliser la question 2.)
6. On suppose que le $\lambda$-calcul avec paires surjectives est confluent. En utilisant la question 4, simplifiée grâce au résultat de la question 5, montrer que $u_1 u_3$ ne peut se réduire en un terme de la forme $zw$ que si $u_1$ se réduit en un terme $\lambda y \cdot \langle \pi_1(zy), \pi_2(z w_3) \rangle$ (où $w_3$ est comme à la question 4), et $u_3$ et $w_3[y := u_3]$ se réduisent tous les deux à $w$.
7. Montrer que, sous les hypothèses et avec les notations de la question précédente, et si $zw$ est un réduit commun de $u_3$ et de $u_1 u_3$, alors $w$ est aussi un réduit commun de $u_3$ et de $u_1 u_3$.
8. En conclure que le $\lambda$-calcul avec paires surjectives n'est pas confluent.

# 3 Le calcul simplement typé

Le $\lambda$-calcul avec paires surjectives *simplement typé* a pour règles de typage les habituelles :

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F} \ (Ax)$$

$$\frac{\Gamma, x : F \vdash u : G}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F \Rightarrow G} \ (\Rightarrow I) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash v : F}{\Gamma \vdash uv : G} \ (\Rightarrow E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u_1 : F_1 \quad \Gamma \vdash u_2 : F_2}{\Gamma \vdash \langle u_1, u_2 \rangle : F_1 \wedge F_2} \ (\wedge I) \quad \frac{\Gamma \vdash u : F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash \pi_1 u : F_1} \ (\wedge E_1) \quad \frac{\Gamma \vdash u : F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash \pi_2 u : F_2} \ (\wedge E_2)$$

1. Montrer que le $\lambda$-calcul avec paires surjectives simplement typé a la propriété d'auto-réduction : si $u \to v$ et $\Gamma \vdash u : F$ est dérivable, alors $\Gamma \vdash v : F$ est dérivable.
2. Montrer que le $\lambda$-calcul avec paires surjectives simplement typé est fortement normalisant.
3. Montrer que le $\lambda$-calcul avec paires surjectives simplement typé est confluent. Pourquoi ceci ne contredit-il pas le résultat de la question 8 de la partie 2 ?