Examen, λ-calcul, 2019

Correction.

Note. Comme promis, l'examen commence par une suite à une partie du DM.

Important. Soyez clair.

1 Un cas particulier terminant du λ-calcul algébrique

J'avais initialement imaginé vous demander de montrer un théorème de terminaison du λ-calcul algébrique très général. A la place, on va étudier un cas particulier, dont l'indication était déjà donnée par les exemples du DM.

On se donne l'algèbre de types :

$$\begin{aligned} \sigma, \tau, \cdots ::= \; & \mathtt{nat} \\ & \mid \mathtt{list}(\sigma) \\ & \mid \sigma \to \tau \end{aligned}$$

Les termes, ainsi que leurs règles de typage, sont donnés par :

$$\frac{}{\vdash x_\sigma : \sigma} \qquad \frac{\vdash u : \sigma \to \tau \quad \vdash v : \sigma}{\vdash uv : \tau} \qquad \frac{\vdash u : \tau}{\vdash \lambda x_\sigma . u : \sigma \to \tau}$$

$$\frac{}{\vdash 0 : \mathtt{nat}} \qquad \frac{\vdash u : \mathtt{nat}}{\vdash \mathtt{s}(u) : \mathtt{nat}}$$

$$\frac{\vdash u : \sigma \quad \vdash v : \mathtt{nat} \to \sigma \to \sigma \quad \vdash w : \mathtt{nat}}{\vdash R_\sigma(u, v, w) : \sigma}$$

$$\frac{}{\vdash \mathtt{nil}_\sigma : \mathtt{list}(\sigma)} \qquad \frac{\vdash u : \sigma \quad \vdash v : \mathtt{list}(\sigma)}{\vdash \mathtt{cons}_\sigma(u, v) : \mathtt{list}(\sigma)}$$

$$\frac{\vdash u : \tau \quad \vdash v : \sigma \to \mathtt{list}(\sigma) \to \tau \to \tau \quad \vdash w : \mathtt{list}(\sigma)}{\vdash M_{\sigma,\tau}(u, v, w) : \tau}$$

On rappelle que tout terme typable a un unique type. Ceci a été démontré dans le DM. On dira simplement *terme* plutôt que terme typable, sauf ambiguïté. Il y a une infinité dénombrable de variables de chaque type.

Les règles de réduction sont :

$$\begin{aligned}
(\beta) \quad & (\lambda x_\sigma . u)v \to u[x_\sigma := v] \\
(R0) \quad & R_\sigma(u, v, 0) \to u \\
(R\mathtt{s}) \quad & R_\sigma(u, v, \mathtt{s}(w)) \to vw(R_\sigma(u, v, w)) \\
(M\mathtt{nil}) \quad & M_{\sigma,\tau}(u, v, \mathtt{nil}_\sigma) \to u \\
(M\mathtt{cons}) \quad & M_{\sigma,\tau}(u, v, \mathtt{cons}_\sigma(s, t)) \to vst(M_{\sigma,\tau}(u, v, t))
\end{aligned}$$

Ce calcul vérifie la propriété d'auto-réduction. Le but de l'exercice est de démontrer que ce calcul termine.

Comme dans le λ-calcul (mais le langage a changé), on définit une notion de candidat. Cependant, nos candidats vont être typés. On définit donc un *candidat de type* τ comme étant un ensemble de termes S *de type* τ satisfaisant :

CR1 $S \subseteq SN_\tau$, où SN_τ est l'ensemble des termes fortement normalisables de type τ ;

CR2 pour tout $u \in S$, tout réduit en une étape u' de u est dans S ;

CR3 tout terme u de type τ qui est neutre et dont tous les réduits en une étape u' sont dans S, est lui-même dans S. Un terme est *neutre* si et seulement s'il n'est pas une λ-abstraction.

Pour tout ensemble S de termes d'un même type σ, pour tout ensemble S' de termes d'un même type τ, on définit $S \Rightarrow S'$ comme étant l'ensemble des termes u de type $\sigma \to \tau$ tels que pour tout $v \in S$, uv est dans S'. On notera que uv est toujours de type τ dans ce cas.

1. Montrer que pour tous candidats S de type σ et S' de type τ, $S \Rightarrow S'$ est un candidat de type $\sigma \to \tau$. Noter qu'on ne peut pas simplement utiliser des résultats du cours : le langage a changé, et la définition de $S \Rightarrow S'$ a changé aussi.

   La démonstration est très similaire à celle du cours.

   CR1 *Soit $u \in S \Rightarrow S'$. Par hypothèse, u est de type $\sigma \to \tau$. On choisit une variable x_σ, qui est dans S par **CR3**. Par définition, ux_σ est dans S', donc dans SN par **CR1** sur S'. S'il y avait une réduction infinie dans u, elle serait reproduite dans ux_σ, donc $u \in SN_{\sigma\to\tau}$.*

   CR2 *Soit $u \in S \Rightarrow S'$ et $u \to u'$. Par hypothèse, u est de type $\sigma \to \tau$, et donc u' aussi par auto-réduction. Pour tout $v \in S$ de type σ, uv est dans S'. Donc, par **CR2** sur S', son réduit en une étape $u'v$ est dans S'.*

   CR3 *Soit u un terme neutre de type $\sigma \to \tau$, dont tous les réduits en une étape u' sont dans $S \Rightarrow S'$.*

   *On montre que pour tout $v \in S$, uv est dans S', par récurrence sur $\nu(v)$, où $\nu(s)$ dénote la longueur de la plus longue réduction parant de s, ce qui est défini si s termine. Ici, v est dans S donc dans SN_σ par **CR1** sur S.*

   Comme u est neutre, on n'a que deux formes de réduction à partir de uv : soit $uv \to u'v$ où $u \to u'$ (dans ce cas, u' est dans $S \Rightarrow S'$ par hypothèse, donc $u'v$ est dans S' par définition de $S \Rightarrow S'$), ou $uv \to uv'$ où $v \to v'$ (alors uv' est dans S' par hypothèse de récurrence).

   *Comme uv est neutre, par **CR3** sur S', uv est dans S'. Comme ceci est vrai pour tout $v \in S$, u est dans $S \Rightarrow S'$.*

On définit maintenant :

$$\begin{aligned} RED_{\texttt{nat}} &= SN_{\texttt{nat}} \\ RED_{\texttt{list}(\sigma)} &= SN_{\texttt{list}(\sigma)} \\ RED_{\sigma\to\tau} &= RED_\sigma \Rightarrow RED_\tau. \end{aligned}$$

Alors RED_τ est un candidat de type τ, pour tout type τ.

2. Montrer que pour tout type σ, pour tout $u \in RED_\sigma$, pour tout $v \in RED_{\texttt{nat}\to\sigma\to\sigma}$, pour tout $w \in RED_{\texttt{nat}}$, $R_\sigma(u, v, w)$ est dans RED_σ.

On montre le résultat par récurrence sur $(\nu(u) + \nu(v) + \nu(w), |w|)$ ordonné lexicographiquement, comme dans le cas du système T du cours. Ici $\nu(u)$, $\nu(v)$, et $\nu(w)$ sont définis, grâce à ***CR1****, et $|w|$ est la taille de w.*

Pour démontrer ceci, on utilise ***CR3****, puisque $R_\sigma(u, v, w)$ est neutre. Il y a cinq cas de réduits en une étape (je prends comme convention que s' dénote un réduit en une étape quelconque de s) :*

(a) $R_\sigma(u', v, w)$: dans RED_σ par hypothèse de récurrence ($\nu(u') < \nu(u)$) ;

(b) $R_\sigma(u, v', w)$: dans RED_σ par hypothèse de récurrence ($\nu(v') < \nu(v)$) ;

(c) $R_\sigma(u, v, w')$: dans RED_σ par hypothèse de récurrence ($\nu(w') < \nu(w)$) ;

(d) u, si $w = 0$ (règle $(R0)$) : dans RED_σ par hypothèse ;

(e) $vw_1(R_\sigma(u, v, w_1))$, si $w = \mathtt{s}(w_1)$ (règle $(R\mathtt{s})$). Comme w_1 est un sous-terme de w, $\nu(w_1) \leq \nu(w)$. Donc $\nu(u) + \nu(v) + \nu(w_1) \leq \nu(u) + \nu(v) + \nu(w)$, et on a $|w_1| < |w|$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et obtenir $R_\sigma(u, v, w_1) \in RED_\sigma$. Il s'ensuit que $vw_1(R_\sigma(u, v, w_1))$ est dans RED_σ.

3. Montrer que pour tous types σ et τ, pour tout $u \in RED_\tau$, pour tout $v \in RED_{\sigma \to \mathtt{list}(\sigma) \to \tau \to \tau}$, pour tout $w \in RED_{\mathtt{list}(\sigma)}$, $M_{\sigma,\tau}(u, v, w)$ est dans RED_τ. Il est recommandé de se contenter de dire ce qui change par rapport à la question précédente, sans tout redécrire en détail.

   Rien ne change à part la notation, essentiellement. On a toujours 5 cas similaires.

On admet le lemme suivant, similaire à un lemme vu en cours : pour tous types σ et τ, pour tout terme u de type τ, si pour tout $v \in RED_\sigma$ on a $u[x_\sigma := v] \in RED_\tau$, alors $\lambda x_\sigma . u \in RED_{\sigma \to \tau}$.

On dira qu'une subsitution $\theta = [x_{1\tau_1} := v_1, \cdots, x_{n\tau_n} := v_n]$ (où pour tout i, le type de v_i vaut τ_i) est *réductible* si et seulement $v_i \in RED_{\tau_i}$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$.

4. Montrer que pour tout terme u de type τ, pour toute substitution réductible θ, $u\theta$ est dans RED_τ, pour tout type τ. En déduire que tout terme (typable) termine.

   Comme dans le cours, on le montre par récurrence sur la dérivation de typage (ou sur le terme u). Pour les variables x_τ, soit $x_\tau = x_{i\tau_i}$ et alors $x_\tau\theta = v_i$ est dans $RED_{\tau_i} = RED_\tau$; ou bien x_τ n'est pas le domaine de θ et $x_\tau\theta = x_\tau$ est dans RED_τ par ***CR3****.*

Pour les applications, c'est par définition de $S \Rightarrow S'$.

Pour les abstractions, c'est par le lemme qui vient d'être admis.

Pour les termes de la forme $R_\sigma(u, v, w)$, c'est par la question 2.

Pour 0, on a $0 \in SN_{\mathtt{nat}} = RED_{\mathtt{nat}}$.

Pour les termes de la forme $\mathtt{s}(u)$, par hypothèse de récurrence on a $u\theta \in RED_{\mathtt{nat}} = SN_{\mathtt{nat}}$, et alors $\mathtt{s}(u\theta)$ termine aussi, car toutes les réductions ont lieu à l'intérieur de $u\theta$.

Le raisonnement est similaire pour les termes $\mathtt{nil}_\sigma$, $\mathtt{cons}_\sigma(u, v)$, et $M_{\sigma,\tau}(u, v, w)$, pour lequel on utilise la question 3 à la place. Pour $\mathtt{cons}_\sigma(u, v)$, on note quand même que toutes les réductions ont lieu à l'intérieur de u ou de v, pas juste à l'intérieur d'un seul sous-terme.

Finalement, en prenant la substitution vide pour θ ($n = 0$), et en utilisant ***CR1***, *u est dans SN_τ.*

On souhaite maintenant ajouter une nouvelle fonction $\mathtt{map}_{\sigma,\tau}$ au langage, avec les règles de typage et de réduction suivantes.

$$\frac{\vdash u : \sigma \to \tau \qquad \vdash v : \mathtt{list}(\sigma)}{\vdash \mathtt{map}_{\sigma,\tau}(u, v) : \mathtt{list}(\tau)}$$

$$\begin{array}{rl} (\mathtt{mapnil}) & \mathtt{map}_{\sigma,\tau}(u, \mathtt{nil}_\sigma) \to \mathtt{nil}_\tau \\ (\mathtt{mapcons}) & \mathtt{map}_{\sigma,\tau}(u, \mathtt{cons}_\sigma(s, t)) \to \mathtt{cons}_\tau(us, \mathtt{map}_{\sigma,\tau}(u, t)). \end{array}$$

Le calcul obtenu en ajoutant ces nouvelles fonctionnalités sera simplement appelé le *nouveau calcul*. Le calcul sans ces fonctionnalités sera appelé l'*ancien calcul*.

5. Les termes (typables) du nouveau calcul terminent-ils toujours ? Justifier.

   Oui. La démonstration la plus simple consiste à traduire le nouveau calcul en l'ancien calcul, de sorte que toute réduction du nouveau se traduise en au moins une réduction de l'ancien.

   La traduction remplace $\mathtt{map}_{\sigma,\tau}(u, v)$ par :

$$M_{\sigma,\tau}(\mathtt{nil}_\tau, \lambda x_\sigma.\lambda y_{\mathtt{list}(\sigma)}.\lambda z_{\mathtt{list}(\tau)}.\mathtt{cons}_\tau(ux_\sigma, z_{\mathtt{list}(\tau)}), v).$$

2 Le $\lambda\upsilon$-calcul

On étudie un autre λ-calcul à substitutions explicites, le $\lambda\upsilon$-*calcul*. Les *expressions* du $\lambda\upsilon$-calcul sont définies par la grammaire :

			Termes
$M, N, P, \ldots$	$::=$	x	Variables
	$\mid$	$\underline{n}$	$(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$ Indices de de Bruijn 1, 2, 3, ...
	$\mid$	MM	Applications
	$\mid$	λM	Abstractions
	$\mid$	$M[S]$	Application de substitution
			Piles (substitutions explicites)
S	$::=$	$\uparrow$	Shift
	$\mid$	$\Uparrow S$	Lift
	$\mid$	$M/$	Slash

$M/$ (« M slash ») représente la même chose que $M \cdot \mathrm{id}$ en $\lambda\sigma$-calcul, et $\Uparrow S$ (« lift S ») représente la même chose que $1 \cdot (M \circ \uparrow)$ en $\lambda\sigma$-calcul.

(β)	$(\lambda M)N \to M[N/]$		
$(Var/)$	$\underline{1}[M/] \to M$	$(Var \Uparrow)$	$\underline{1}[\Uparrow S] \to \underline{1}$
$(\uparrow /)$	$\underline{n+1}[N/] \to \underline{n}$	$(\uparrow\Uparrow)$	$\underline{n+1}[\Uparrow S] \to \underline{n}[S][\uparrow]$
(App)	$(MN)[S] \to M[S](N[S])$	(Lam)	$(\lambda M)[S] \to \lambda(M[\Uparrow S])$
$(Var \uparrow)$	$\underline{n}[\uparrow] \to \underline{n+1}$		

FIGURE 1 – Les règles de réduction de $\lambda\upsilon$ $(n \geq 1)$

Les règles de réduction du $\lambda\upsilon$-calcul sont données en figure 1. Le système formé de toutes les règles sauf (β) s'appelle υ.

La traduction d'un λ-terme u en un $\lambda\upsilon$-terme $u^\bullet(\ell)$ (dans le contexte de la liste de variables ℓ, comme pour le $\lambda\sigma$-calcul étudié dans le cours) est définie comme suit. (Contrairement au $\lambda\sigma$-calcul, le terme $\underline{n}$ n'est *pas* une abréviation.)

$$
\begin{array}{rcll}
x^\bullet(\ell) & \hat{=} & \underline{n} & \text{si } n \text{ est le premier entier tel que } x = \ell(n) \\
 & & x\underbrace{[\uparrow][\uparrow]\ldots[\uparrow]}_{k \text{ fois}} & \text{si } x \text{ n'est pas dans } \ell,\ k \text{ est la longueur de } \ell \\
(uv)^\bullet(\ell) & \hat{=} & u^\bullet(\ell)v^\bullet(\ell) & \\
(\lambda x \cdot u)^\bullet(\ell) & \hat{=} & \lambda(u^\bullet(x :: \ell)) &
\end{array}
$$

(La liste ℓ de longueur k est par convention la suite $\ell(1)$, $\ell(2)$, …, $\ell(k)$, où $\ell(i)$ dénote donc le $i$ième élément de la liste.)

6. Montrer, en considérant le $\lambda\upsilon$-terme $(\lambda x)N[\uparrow]$, où x est une variable et N est un terme normal que l'on choisira, que le $\lambda\upsilon$-calcul n'est *pas* confluent.

   $(\lambda x)N[\uparrow]$ se réduit par (β) en $x[N/][\uparrow]$, qui est normal ; et d'autre part en $((\lambda x)[\uparrow])(N[\uparrow])$ par (App). Ce dernier terme se réduit par (Lam) en $(\lambda x[\Uparrow\uparrow])(N[\uparrow])$, qui se réduit par (β) en $x[\Uparrow\uparrow][N[\uparrow]/]$. Mais ce dernier terme est normal et différent de $x[N/][\uparrow]$, par exemple si N est une variable y. On a donc obtenu un diagramme de confluence locale qui ne se joint pas. En particulier, le calcul n'est pas confluent.

Le reste de l'exercice consiste à montrer que le $\lambda\upsilon$-calcul restreint aux termes clos est confluent, lui.

7. Démontrer que toute pile du $\lambda\upsilon$-calcul est de la forme $\Uparrow^p (M/)$ pour un certain terme M, ou bien $\Uparrow^p (\uparrow)$, $p \in \mathbb{N}$.

   C'est pratiquement une évidence. Formellement, on peut montrer que toute pile S est d'une de ces formes par récurrence structurelle sur la pile S. C'est le cas si S est de la forme $\uparrow$ ou $M/$, auquel cas $p = 0$, et c'est par hypothèse de récurrence si S est de la forme $\Uparrow S'$.

8. On définit deux mesures des $\lambda\upsilon$-termes comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \mu_1(\underline{n}) = 2^n & \mu_1(MN) = \mu_1(M) + \mu_1(N) & \mu_1(x) = 2 \\ \mu_1(\lambda M) = \mu_1(M) + 1 & \mu_1(M[S]) = \mu_1(M)\mu_1(S) & \\ \mu_1(\uparrow) = 2 & \mu_1(\Uparrow S) = \mu_1(S) & \mu_1(M/) = \mu_1(M) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mu_2(\underline{n}) = 2^n & \mu_2(MN) = \mu_2(M) + \mu_2(N) + 1 & \mu_2(x) = 2 \\ \mu_2(\lambda M) = \mu_2(M) + 1 & \mu_2(M[S]) = \mu_2(M)(\mu_2(S) + 1) & \\ \mu_2(\uparrow) = 2 & \mu_2(\Uparrow S) = 2\mu_2(S) + 1 & \mu_2(M/) = \mu_2(M) \end{array}$$

   En utilisant μ_1 et μ_2, démontrer que υ termine (normalise fortement).

   On s'aperçoit d'abord que si M se réécrit en une étape vers N par υ, alors $\mu_1(M) \geq \mu_1(N)$, et que l'inégalité est stricte sauf dans les cas des règles (App), $(\uparrow\Uparrow)$, $(Var\uparrow)$.
   Ceci fonctionne lorsque M est le υ-rédex lui-même, et ceci forme la base d'une récurrence sur la profondeur du rédex contracté, qui est immédiate.
   Il est important de noter que μ_1 prend ses valeurs dans $\{2, 3, \cdots\}$: dans le cas de la règle $(Var/)$ par exemple, on doit vérifier que $2\mu_1(M) > \mu_1(M)$, ce qui est vrai parce que $\mu_1(M) > 1$. Explicitement :

— *$(Var/)$: $2\mu_1(M) > \mu_1(M)$, car $\mu_1(M) > 1$;*

— *$(Var \Uparrow)$: $2\mu_1(S) > 2$, car $\mu_1(S) > 1$;*

— *$(\uparrow /)$: $2^{n+1}\mu_1(N) > 2^n$ car $\mu_1(N) \geq 1$;*

— *$(\uparrow\Uparrow)$: $2^{n+1}\mu_1(S)$ des deux côtés ;*

— *(App) : $(\mu_1(M) + \mu_1(N))\mu_1(S) = \mu_1(M)\mu_1(S) + \mu_1(N)\mu_1(S)$;*

— *(Lam) : $(\mu_1(M)+1)\mu_1(S) = \mu_1(M)\mu_1(S)+\mu_1(S) > \mu_1(M)\mu_1(S)+1$ car $\mu_1(S) > 1$;*

— *$(Var \uparrow)$: 2^{n+1} des deux côtés.*

De même, si M se réécrit en N par l'une des règles (App), $(\uparrow\Uparrow)$, ou $(Var \uparrow)$, alors $\mu_2(M) > \mu_2(N)$. Dans le cas des υ-rédexes eux-mêmes :

— *(App) : $(\mu_2(M) + \mu_2(N) + 1)(\mu_2(S) + 1) > \mu_2(M)(\mu_2(S) + 1) + \mu_2(N)(\mu_2(S) + 1) + 1$ car la différence entre les deux vaut $\mu_2(S) > 0$;*

— *$(\uparrow\Uparrow)$: $2^{n+1}(2\mu_2(S) + 1 + 1) > 2^n(\mu_2(S) + 1)(2 + 1)$ car le côté gauche vaut $4.2^n(\mu_2(S)+1)$, et le côté droit vaut $3.2^n(\mu_2(S)+1)$;*

— *$(Var \uparrow)$: $2^n(2 + 1) > 2^{n+1}$ ($3.2^n > 2.2^n$).*

Le cas inductif est immédiat.

On conclut par la mesure $(\mu_1(M), \mu_2(M))$ ordonnée lexicographiquement.

9. On admet que υ est localement confluent. Pourquoi υ est-il confluent sur les termes clos ? Citer le nom du théorème que vous utilisez, le cas échéant.

   Par le lemme de Newman.

On admettra que si $u \to v$ en λ-calcul, alors pour toute liste ℓ de variables contenant les variables libres de u, $u^\bullet(\ell) \to^+ v^\bullet(\ell)$.

On définit une traduction inverse par :

$$
\begin{array}{rl}
(\underline{n})^\circ(u_1 :: \ldots :: u_n :: P) = u_n & \uparrow^\circ (u :: P) = P \\
(MN)^\circ(P) = M^\circ(P)N^\circ(P) & (\Uparrow S)^\circ(u :: P) = u :: S^\circ(P) \\
(\lambda M)^\circ(P) = \lambda x \cdot M^\circ(x :: P) & (M/)^\circ(P) = M^\circ(P) :: P \\
(M[S])^\circ(P) = M^\circ(S^\circ(P)), &
\end{array}
$$

où P est une liste suffisamment longue de λ-termes, et x est une variable fraîche dans le cas de λM.

On admettra que si P est de longueur au moins $d(M)$, alors $M^\circ(P)$ est défini.

10. Par *suffisamment longue*, on entend précisément que $M^\circ(P)$ est défini pour toute liste P de longueur au moins $d(M)$, où $d(M)$ est défini par récurrence sur M par :

$$\begin{array}{rr} d(\underline{n}) = ? & \\ d(MN) = ? & d(\lambda M) = ? \\ d(M[\Uparrow^p (N/)]) = ? & d(M[\Uparrow^p \uparrow]) = ? \end{array}$$

Remplacer les points d'interrogation. On demande les meilleures valeurs possibles.

$$\begin{aligned} & d(\underline{n}) = n \\ & d(MN) = \max(d(M), d(N)) \\ & d(\lambda M) = \max(d(M) - 1, 0) \\ & d(M[\Uparrow^p (N/)]) = \max(d(M) - 1, d(N) + p) \\ & d(M[\Uparrow^p \uparrow]) = \max(d(M) + 1, p + 1). \end{aligned}$$

On admettra que si M se réduit en N en $\lambda\upsilon$-calcul, alors $d(M) \geq d(N)$. Pour toute liste P de longueur au moins $d(M)$, $M^\circ(P)$, et si $M \to N$, alors (comme $d(N) \leq d(M)$), $N^\circ(P)$ est aussi défini. On admettra qu'on a alors aussi $M^\circ(P) \to^* N^\circ(P)$ et que de plus, si la règle utilisée n'est pas (β), alors $M^\circ(P) = N^\circ(P)$.

Un $\lambda\upsilon$-terme est *clos* si et seulement s'il ne contient pas de variable libre.

11. Montrer que les $\lambda\upsilon$-termes clos υ-normaux ne contiennent pas d'occurrence de l'opérateur $\_[\_]$.

Par récurrence sur le $\lambda\upsilon$-terme clos υ-normal. Le seul cas intéressant est celui des termes de la forme $M[S]$, donc de la forme $M[\Uparrow^p (N/)]$ ou $M[\Uparrow^p \uparrow]$, par la question 7. Comme M est υ-normal, M ne peut pas être égal à $\underline{1}$ (règle $(Var/)$ ou $(Var\uparrow)$ si $p = 0$ ou $(Var\Uparrow)$ si $p \geq 1$) ni $\underline{n+1}$ (règle $(\uparrow /)$ ou $(Var\uparrow)$ si $p = 0$ ou $(\uparrow\Uparrow)$ si $p \geq 1$), ni une application (règle (App)) ni une abstraction (règle (Lam)). Le cas des variables est exclu car M est clos. Enfin, M ne contient lui-même pas de $\_[\_]$, par hypothèse de récurrence, donc ce cas ne peut pas se présenter.

12. Montrer que pour tout $\lambda\upsilon$-terme M clos υ-normal, pour toute liste ℓ de variables distinctes deux à deux de longueur au moins $d(M)$, $(M^\circ(\ell))^\bullet(\ell) = M$.

Par récurrence sur M. On utilise la question 11 pour exclure le cas de l'opérateur $\_[\_]$. On a notamment $((\underline{n})^\circ(x_1 :: \cdots :: x_n :: \ell))^\bullet(x_1 :: \cdots :: x_n :: \ell) = x_n^\bullet(x_1 :: \cdots :: x_n :: \ell) = \underline{n}$ (parce que toutes les variables sont deux à deux disjointes), et les cas des applications et des abstractions sont immédiats. Il n'y a, finalement, pas de variable.

13. Montrer que pour tout $\lambda\upsilon$-terme M clos, pour toute liste ℓ de variables distinctes deux à deux de longueur au moins $d(M)$, M se réécrit par υ en $(M^\circ(\ell))^\bullet(\ell)$.

    Comme υ termine, M se réécrit par υ en une forme υ-normale M'. Comme M est clos, M' aussi (vérification facile). Par la question 12 (et comme ℓ est de longueur au moins $d(M) \geq d(M')$) $M' = (M'^\circ(\ell))^\bullet(\ell)$. On a admit que comme M se réécrit par υ en M', on a $M'^\circ(\ell) = M^\circ(\ell)$, donc $(M'^\circ(\ell))^\bullet(\ell) = (M^\circ(\ell))^\bullet(\ell)$.

14. Montrer que le $\lambda\upsilon$-calcul est confluent *sur les termes clos*. Autrement dit, si $M \to^* N_1$ et $M \to^* N_2$ en $\lambda\upsilon$-calcul, où M est clos, alors il existe un $\lambda\upsilon$-terme (clos) P tel que $N_1 \to^* P$ et $N_2 \to^* P$.

    Par la technique d'interprétation de Hardin. On prend ℓ de longueur au moins $d(M)$. On note que $d(M) \geq d(N_1), d(N_2)$. Alors $M^\circ(\ell) \to^* N_1^\circ(\ell), N_2^\circ(\ell)$. Comme le λ-calcul est confluent, $N_1^\circ(\ell)$ et $N_2^\circ(\ell)$ ont un réduit commun w. En utilisant la question 13, $N_1 \to^* (N_1^\circ(\ell))^\bullet(\ell) \to^* w^\bullet(\ell)$ et de même $N_2 \to^* w^\bullet(\ell)$.