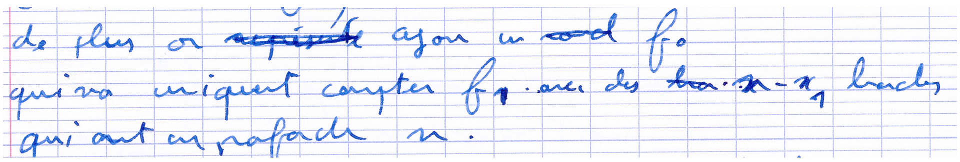
DM, λ-calcul, 2019

à rendre le 09 avril 2019 au plus tard

Correction.

Note. L'examen contiendra peut-être une suite à ce DM. Consacrez-y donc du temps.

Important. Soyez clair. Je considérerai toute réponse trop floue, alambiquée, ou simplement mal écrite, comme fausse. Vous n'avez pas d'excuse : vous avez le temps de faire ce DM. Voici un exemple à éviter :



C'est illisible. Les ratures et les fautes d'orthographe n'arrangent rien. Et la réponse est complètement hors sujet, mais c'est plus difficile à voir.

Voici un exemple que l'on peut considérer comme un modèle :

Q 5

> Si F une fonction inflationnaire d'un treillis complet L dans lui-même, et si $\eta \leq \eta'$, alors
>
> $$lfp_\eta(F) \leq lfp_{\eta'}(F)$$

En effet :

Il suffit de constater que l'ensemble $FP_{\eta'}$ des points fixes supérieurs à η' est, par transitivité, inclus dans l'ensemble FP_η des points fixes supérieurs à η.

Comme $lfp_\eta(F)$ minore $FP_\eta \supset FP_{\eta'}$, $lfp_\eta(F)$ est un minorant de $FP_{\eta'}$, et

$$lfp_\eta(F) \leq lfp_{\eta'}(F)$$

puisque $lfp_{\eta'}(F)$ est le plus grand des minorants de $FP_{\eta'}$.

C'est clair, facile à lire. L'argument est correct, écrit de façon concise, sans analyse de cas ou argument par contradiction superflu.

⋆ ⋆ ⋆

1 Le λ-calcul algébrique

On considère un λ-calcul simplement typé, étendu à l'aide de constructions de termes comme celles utilisées dans notre étude du lpo.

Pour ceci, on considère pour commencer une algèbre de types simples étendus (les *types*, en bref). Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de couples c/n, où c est un symbole appelé *constructeur de types* et $n \in \mathbb{N}$ est son arité. On supposera qu'il existe au moins un constructeur de type d'arité 0. Les *types* sont définis inductivement par :

— pour tous types σ, τ, $\sigma \to \tau$ est un type ;

— pour tout $c/n \in \mathcal{S}$, pour tous types $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, $c(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ est un type.

Exemple 1. *Lorsque* $\mathcal{S} = \{\mathtt{int}/0, \mathtt{bool}/0, \mathtt{list}/1\}$*, les objets suivants sont des types :*

— $\mathtt{int}()$ *(abrégé* $\mathtt{int}$*),*

— $\mathtt{list}(\sigma) \to \mathtt{int}$ *pour chaque type* σ*,*

— *et pour tous types* σ *et* τ*,* $(\sigma \to \tau) \to (\mathtt{list}(\sigma) \to \mathtt{list}(\tau))$.

Les termes du λ-calcul algébrique sont une extension du λ-calcul, où l'on a ajouté des constantes f et des règles de réduction. Formellement, soit Σ une *signature*, c'est-à-dire un ensemble de *déclarations* $f : \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n \Rightarrow \tau$, où $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \tau$ sont des types et f est un symbole, où chaque symbole n'est déclaré qu'une fois dans Σ.

Exemple 2. *Poursuivant l'exemple 1,* Σ *peut contenir :*

— $0 :\Rightarrow \mathtt{int}$,

— $\mathtt{s} : \mathtt{int} \Rightarrow \mathtt{int}$,

— $\mathtt{nil}_\sigma :\Rightarrow \mathtt{list}(\sigma)$,

— $\mathtt{cons}_\sigma : \sigma \times \mathtt{list}(\sigma) \Rightarrow \mathtt{list}(\sigma)$,

— $\mathtt{len}_\sigma : \mathtt{list}(\sigma) \Rightarrow \mathtt{int}$,

— $\mathtt{map}_{\sigma,\tau} : (\sigma \to \tau) \times \mathtt{list}(\sigma) \Rightarrow \mathtt{list}(\tau)$*, pour tous types* σ *et* τ*.*

Les termes du λ-calcul algébrique sont définis par :

$$
\begin{array}{rlr}
s, t, u, v, \ldots ::= & x_\sigma, y_\tau, z_\xi, \ldots & \text{variables} \\
& \mid uv & \text{applications} \\
& \mid \lambda x_\sigma . u & \text{abstractions} \\
& \mid f(s_1, \cdots, s_n) & \text{où } f \in \Sigma, \text{ d'arité } n
\end{array}
$$

On notera que les variables sont toutes décorées d'un type : on utilise ici une variante dite de Church du λ-calcul, où les types des variables sont explicitement indiqués. On a $x_\sigma = y_\tau$ si et seulement si $x = y$ et $\sigma = \tau$.

Grâce à cela, les règles de typage n'ont pas besoin de contexte de typage. À part cela, on a juste besoin d'une nouvelle règle (f) :

$$
\frac{}{\vdash x_\sigma : \sigma}\,(Var) \qquad \frac{\vdash u_1 : \sigma_1 \cdots \vdash u_n : \sigma_n}{\vdash f(u_1, \cdots, u_n) : \tau}\,(f)
$$
$$
\text{si } f : \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n \Rightarrow \tau \text{ est dans } \Sigma
$$

$$
\frac{\vdash u : \sigma \to \tau \quad \vdash v : \sigma}{\vdash uv : \tau}\,(App) \qquad \frac{\vdash u : \tau}{\vdash \lambda x_\sigma . u : \sigma \to \tau}\,(Abs)
$$

1. Montrer que, pour tout terme u, il existe au plus une dérivation de typage de la forme $\vdash u : \tau$. Si cette dérivation existe, on dira que u est *typable*. Cette dérivation détermine notamment un unique type τ, qu'on appellera *le type de* u.

   Par récurrence immédiate sur u*. Dans le cas de* (f)*, on utilise de façon cruciale que chaque symbole* f *est déclaré au plus une fois dans* Σ*.*

Les règles de calcul sont paramétrées par un ensemble $\mathcal{R}$ dits de *règles* $\ell \to r$, où ℓ et r sont des termes du λ-calcul algébrique tels que :

(i) ℓ ne contient aucune abstraction,

(ii) ℓ ne contient aucune application,

(iii) ℓ et r sont typables et de même type,

(iv) et toutes les variables libres de r sont libres dans ℓ.

On définit la réduction $\to_\mathcal{R}$ comme étant la plus petite réduction stable par contextes (comme pour le λ-calcul) telle que :

— $(\lambda x.u)v \to_\mathcal{R} u[x := v]$ (β-réduction),

— et $\ell\theta \to_\mathcal{R} r\theta$ pour toute règle $\ell \to r$ de $\mathcal{R}$, où θ est une substitution (parallèle) quelconque $[x_{1\sigma_1} := t_1, \cdots, x_{n\sigma_n} := t_n]$, où pour tout i, t_i est typable et de type σ_i.

Exemple 3. *$\mathcal{R}$ peut contenir les règles :*

— $\texttt{len}_\sigma(\texttt{nil}_\sigma) \to 0$,

— $\texttt{len}_\sigma(\texttt{cons}_\sigma(x_\sigma, y_{\texttt{list}(\sigma)})) \to \texttt{s}(\texttt{len}_\sigma(y_{\texttt{list}(\sigma)}))$,

— $\texttt{map}_{\sigma,\tau}(z_{\sigma\to\tau}, \texttt{nil}_\sigma) \to \texttt{nil}_\tau$,

— $\texttt{map}_{\sigma,\tau}(z_{\sigma\to\tau}, \texttt{cons}_\sigma(x_\sigma, y_{\texttt{list}(\sigma)})) \to \texttt{cons}_\tau(z_{\sigma\to\tau} x_\sigma, \texttt{map}_{\sigma,\tau}(z_{\sigma\to\tau}, y_{\texttt{list}(\sigma)}))$.

On aura alors notamment $\texttt{len}_{\texttt{int}}(\texttt{cons}_{\texttt{int}}(0, \texttt{cons}_{\texttt{int}}(1, \texttt{nil}_{\texttt{int}}))) \to_{\mathcal{R}} \texttt{s}(\texttt{len}_{\texttt{int}}(\texttt{cons}_{\texttt{int}}(1, \texttt{nil}_{\texttt{int}})))$, *en choisissant la deuxième règle, $\sigma = \texttt{int}$, et $\theta = [x_{\texttt{int}} := 0, y_{\texttt{list(int)}} := \texttt{cons}_{\texttt{int}}(1, \texttt{nil}_{\texttt{int}})]$.*

2. Montrer la propriété d'auto-réduction : si u est typable de type τ et $u \to_{\mathcal{R}} v$ alors $v : \tau$ est typable et de type τ. On se concentrera sur les cas nouveaux par rapport au λ-calcul (pas la peine de considérer la β-réduction, en clair). On donnera aussi *explicitement*, et *à part*, la liste des hypothèses dont on a besoin, parmi (i)–(iv).

   Le seul cas nouveau est celui d'une réduction $s\theta \to_{\mathcal{R}} t\theta$. Par (iii), s et t sont toutes les deux typables d'un même type τ. Par une récurrence facile sur s (resp., t), en utilisant le fait que θ respecte les types, $s\theta$ et $t\theta$ sont aussi de type τ.
   On a donc utilisé uniquement l'hypothèse (iii).

3. On suppose dans cette question que $\mathcal{S}$ contient $o/0$, Σ contient $\texttt{r} : o \Rightarrow (o \to o)$ et $\texttt{i} : (o \to o) \Rightarrow o$, et $\mathcal{R}$ contient la règle $\texttt{r}(\texttt{i}(x_{o\to o})) \to x_{o\to o}$.

   (a) Donner une traduction $u \mapsto u^*$ du λ-calcul pur (non typé) vers le λ-calcul algébrique. Votre traduction devra satisfaire les propriétés suivantes : (A) u^* est de type o pour tout λ-terme u ; (B) si $u \to v$ alors $u^* \to^+ v^*$. Justifier, en introduisant clairement tout lemme auxiliaire qui serait nécessaire, et en les mettant dans le bon ordre (on ne peut utiliser que des lemmes précédemment démontrés ; réécrivez si nécessaire).

$$x^* = x_o$$
$$(uv)^* = \texttt{r}(u^*)v^*$$
$$(\lambda x.u)^* = \texttt{i}(\lambda x_o.u)$$

   Une récurrence immédiate sur u montre que u^* est de type o.
   Pour ce qui est de la réduction, nous montrons d'abord le lemme 1 : $u^*[x_o := v^*] = (u[x := v])^*$. C'est une récurrence sur u, qui ne présente aucune difficulté.

Nous montrons ensuite le lemme 2 : $((\lambda x.u)v)^* \to^+ (u[x := v])^*$. *On a :*

$$\begin{aligned} ((\lambda x.u)v)^* &= \mathtt{r}(\mathtt{i}(\lambda x_o.u^*))(v^*) \\ &\to (\lambda x_o.u^*)v^* \\ &\to u^*[x_o := v^*] \\ &= (u[x := v])^* && \textit{par le lemme 1.} \end{aligned}$$

Finalement, on montre (B) par récurrence sur la profondeur du rédex contracté dans u*, en utilisant le lemme 2 si* u *est lui-même ce rédex.*

(b) En déduire que le λ-calcul algébrique typé ne termine pas, même faiblement, en général. On donnera un contre-exemple *explicite* u, avec une étude de toutes les réductions partant de u.

On prend Ω^* *où* $\Omega = \delta\delta$, $\delta = \lambda x.xx$*, à savoir :*

$$\mathtt{r}(\delta^*)\delta^* = \mathtt{r}(\mathtt{i}(\lambda x_o.\mathtt{r}(x_o)x_o))(\mathtt{i}(\lambda x_o.\mathtt{r}(x_o)x_o)).$$

La question (3a) permet de montrer que ce terme ne termine pas fortement, mais il pourrait y avoir d'autres réductions dans le λ*-calcul algébrique. Sur l'exemple au moins, ce n'est pas le cas. L'unique réduction est :*

$$\begin{aligned} \mathtt{r}(\delta^*)\delta^* &\to_{\mathcal{R}} (\lambda x_o.\mathtt{r}(x_o)x_o)\delta^* && \textit{par } \mathcal{R} \\ &\to_{\mathcal{R}} \mathtt{r}(\delta^*)\delta^* && \textit{par } (\beta) \\ &\to_{\mathcal{R}} \cdots \end{aligned}$$

2 Réductions de tête

On s'intéresse à la notion de réduction de tête $\to_t$ dans le λ-calcul pur, c'est-à-dire non typé. On rappelle les règles de typage du système $\mathcal{D}\Omega$ (appelé $\mathcal{D}_\omega$ dans les feuilles de TD) :

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\,(Ax) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash u : \Omega}\,(\Omega)$$

$$\frac{\Gamma, x : F \vdash u : G}{\Gamma \vdash \lambda x.u : F \Rightarrow G}\,(\Rightarrow I) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash v : F}{\Gamma \vdash uv : G}\,(\Rightarrow E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F \quad \Gamma \vdash u : G}{\Gamma \vdash u : F \cap G}\,(\cap I) \quad \frac{\Gamma \vdash u : F \cap G}{\Gamma \vdash u : F}\,(\cap E_1) \quad \frac{\Gamma \vdash u : F \cap G}{\Gamma \vdash u : G}\,(\cap E_2)$$

Les types sont donnés par la grammaire :

$$\begin{aligned}
F, G, \ldots ::= b & \qquad \text{type de base} \\
\mid \Omega & \qquad \text{type universel} \\
\mid F \cap G & \qquad \text{type intersection} \\
\mid F \Rightarrow G & \qquad \text{type flèche.}
\end{aligned}$$

Soit HN l'ensemble des λ-termes (purs) qui ont une forme normale de tête, c'est-à-dire dont la réduction de tête termine, et Λ l'ensemble de tous les λ-termes (purs). On appellera *t-contracté* u' d'un λ-terme u est un λ-terme tel que $u \to_t u'$. Pour tout λ-terme $u \in HN$, on notera $\nu_t(u)$ la longueur de la plus grande réduction de tête partant de u.

4. Pour tout λ-terme u, et pour toute variable x, montrer que si $ux \in HN$ alors $u \in HN$.

Par récurrence sur $\nu_t(ux)$. On doit considérer deux cas. Si u est une λ-abstraction $\lambda x \cdot v$ (où la variable liée est x, par commodité), alors l'unique réduction de tête partant de ux (qui termine par hypothèse) est de la forme

$$\begin{aligned} ux &\to_t v \\ &\to_t^* v_\infty \end{aligned}$$

Alors $u = \lambda x.v \to_t^* \lambda x.v_\infty$ et $\lambda x.v_\infty$ est normal de tête. Donc $u \in HN$.

Si u n'est pas une λ-abstraction, alors soit u est normal de tête, et on a fini, soit u a un t-contracté u'. Comme u n'est pas une λ-abstraction, $ux \to_t u'x$. Ce ne serait pas vrai si u était une λ-abstraction ! Ici u est de la forme $(\lambda y.t)u_1 \cdots u_m$ avec $m \geq 1$, $u' = t[y := u_1]u_2 \cdots u_m$, donc $ux = (\lambda y.t)u_1 \cdots u_m x \to_t t[y := u_1]u_2 \cdots u_m x = u'x$. De plus, $u'x$ est dans HN, car la réduction de tête est déterministe. Par hypothèse de récurrence, u' est dans HN, donc aussi u.

Notons $u \to_{t,\neq\lambda}^* \lambda x.u_0$ si et seulement si la réduction de tête partant de u aboutit à une λ-abstraction, et $\lambda x.u_0$ est la première λ-abstraction le long de cette réduction ; autrement dit, si $u = t_0 \to_t t_1 \to_t \cdots \to_t t_{n-1} \to_t t_n$ où $n \in \mathbb{N}$, t_0, t_1, $\ldots$, t_{n-1} ne sont pas des λ-abstractions, et $t_n = \lambda x.u_0$. (Comme cas particulier, on a $\lambda x.u_0 \to_{t,\neq\lambda}^* \lambda x.u_0$, avec $n = 0$.)

Pour tous ensembles S et S' de λ-termes purs, on note $S \Rightarrow S'$ l'ensemble des λ-termes purs u dans HN tels que pour toute réduction de tête de la forme $u \to_{t,\neq\lambda}^* \lambda x.u_0$, on a $u_0[x := v] \in S'$ pour tout $v \in S$. On notera que ce n'est *pas* la définition utilisée en cours.

On pose :

$$\begin{aligned} HRED_b &= HN & (b \text{ type de base}) \\ HRED_{F\Rightarrow G} &= HRED_F \Rightarrow HRED_G \\ HRED_\Omega &= \Lambda \\ HRED_{F\cap G} &= HRED_F \cap HRED_G. \end{aligned}$$

On dira qu'un ensemble S de λ-termes purs est un *t-candidat* si et seulement s'il vérifie les propriétés :

HR1 $S \subseteq HN$;

HR3 tout terme u neutre dont tous les t-contractés u' sont dans S est lui-même dans S,

où un terme *neutre* est un terme qui n'est pas une λ-abstraction. Il n'y a pas de condition HR2, et la numérotation n'est faite que pour vous rappeler une définition proche du cours.

5. Pour tout ensemble de λ-termes S, pour tout t-candidat S', montrer que $S \Rightarrow S'$ est un t-candidat.

   HR1 *Pour tout $u \in S \Rightarrow S'$, u est dans HN par définition de $S \Rightarrow S'$.*

   HR3 *Supposons u neutre, et que tous les t-contractés (il y en a au plus un…) u' de u sont dans $S \Rightarrow S'$. Ils sont donc tous dans HN, ce qui implique que u est dans HN. De plus, si $u \to^*_{t,\neq\lambda} \lambda x.u_0$, alors cette réduction prend au moins une étape (car u est neutre !), donc on a $u \to_t u' \to^*_{t,\neq\lambda} \lambda x.u_0$ pour un certain t-contracté u' de u. Par hypothèse, u' est dans $S \Rightarrow S'$, donc pour tout $v \in S$, $u_0[x := v]$ est dans S'. On en déduit que u est dans $S \Rightarrow S'$.*

On identifie certains types, dits *triviaux*, par la grammaire :

$$\begin{aligned} \Theta ::= {} & \Omega \\ & \mid \Theta_1 \cap \Theta_2 \\ & \mid F \Rightarrow \Theta, \end{aligned}$$

où F est un type quelconque. Les autres types sont dits *non triviaux*.

6. Montrer que pour tout type non trivial F, $HRED_F$ est un t-candidat.

   Ma première solution était erronée, et supposait implicitement que $HRED_F$ était égal à Λ pour tout type trivial F (ce qui est faux). La question est juste, cependant, mais nécessite de montrer le lemme auxiliaire suivant :

(L) $HRED_F$ satisfait HR3 pour tout type F, trivial ou non.

C'est par récurrence sur F. Si $F = b$, HN satisfait HR3. C'est aussi trivial si $F = \Omega$, car tous les termes sont dans Λ. Si $F = G \cap H$, soit u un terme neutre dont tous les t-contractés sont dans $HRED_F$, donc dans $HRED_G$ et dans $HRED_H$. Par hypothèse de récurrence, u est dans $HRED_G$ et dans $HRED_H$, donc dans $HRED_F$. Si $F = G \Rightarrow H$, soit u un terme neutre dans HN dont tous les t-contractés u' sont dans $HRED_F$, c'est-à-dire sont tels que pour toute réduction de tête de la forme $u' \to^*_{t,\neq\lambda} \lambda x.u_0$, on a $u_0[x := v] \in HRED_H$ pour tout $v \in HRED_G$. Comme à la question 5, toute réduction de tête de la forme $u \to^*_{t,\neq\lambda} \lambda x.u_0$ est de la forme $u \to_t u' \to^*_{t,\neq\lambda} \lambda x.u_0$ car u est neutre, et donc $u \in HRED_F$.

On montre maintenant le résultat demandé par récurrence sur F. Par (L), il ne reste qu'à montrer que $HRED_F \subseteq HN$ pour tout type F non trivial. C'est clair si F est un type de base b. Si F est de la forme $F_1 \Rightarrow F_2$, c'est une conséquence de la définition de $HRED_{F_1 \Rightarrow F_2}$. Le cas $F = \Omega$ ne se présente pas, étant trivial. Finalemenent, lorsque F est de la forme $F_1 \cap F_2$, comme F est non trivial, F_1 ou F_2 est non trivial. Supposons F_1 non trivial, sans perte de généralité. Alors $HRED_{F_1}$ est un t-candidat par hypothèse de récurrence, donc inclus dans HN, et alors $HRED_F \subseteq HRED_{F_1}$ aussi.

7. Pour tout ensemble S de λ-termes, pour tout t-candidat S', pour tout $u \in S \Rightarrow S'$ et pour tout $v \in S$, montrer que uv est dans S'.

   Par récurrence sur $\nu_t(u)$, qui est bien défini puisque $S \Rightarrow S' \subseteq HN$. Pour montrer que $uv \in S'$, nous allons utiliser HR3, profitant du fait que uv est neutre.

   Si u est une λ-abstraction $\lambda x.u_0$, alors l'unique t-contracté de uv est $u_0[x := v]$. Comme $u \in S \Rightarrow S'$ et (trivialement) $u \to^*_{t,\neq\lambda} \lambda x.u_0$, $u_0[x := v]$ est dans S'.

   Sinon, les seuls t-contractés de uv sont $u'v$ où u' est un (l'unique) t-contracté de u. Par hypothèse de récurrence $u'v$ est dans S'.

   Dans les deux cas, les t-contractés de uv sont dans S'. Par HR3, uv est lui-même dans S'.

8. Pour tout ensemble S de λ-termes tel que S contient toutes les variables, pour tout t-candidat S', montrer que pour tout λ-terme pur t, si $t[x := v] \in S'$ pour tout $v \in S$, alors $\lambda x.t$ est dans $S \Rightarrow S'$.

   Puisque S contient la variable x, l'hypothèse nous donne $t \in S'$ (en prenant $v = x$), donc $t \in HN$. Comme la réduction de tête de $\lambda x.t$ se passe entièrement dans t, $\lambda x.t$ est dans HN.

Ensuite, supposons que $\lambda x.t \to^*_{t,\neq\lambda} \lambda x.u_0$. Par définition de $\to^*_{t,\neq\lambda}$, cette réduction s'effectue en 0 étape (!). Donc $u_0 = t$, d'où $u_0[x := v] = t[x := v] \in S'$ pour tout $v \in S$.

9. Montrer que pour tout jugement de typage $\Gamma \vdash u : F$ en $\mathcal{D}\Omega$, où $\Gamma = x_1 : F_1, \cdots, x_n : F_n$ et F est un type non trivial, pour toute substitution $\theta = [x_1 := v_1, \cdots, x_n := v_n]$ avec $v_i \in HRED_{F_i}$ pour tout i, on a $u\theta \in HRED_F$.

Par récurrence sur le jugement de typage.
La règle (Ω) ne s'applique pas, puisque F est non trivial.
• (Ax). *On a $u = x_i$ et $F = F_i$, donc $u\theta = v_i \in HRED_{F_i} = HRED_F$.*
• $(\Rightarrow E)$. *On a $u = st$, où $s\theta \in HRED_{F_1 \Rightarrow F}$ et $t\theta \in HRED_{F_1}$ pour un certain type F_1. Comme F est non trivial, $HRED_F$ est un t-candidat par la question 6, donc nous pouvons appliquer la question 7 et conclure que $u\theta = (s\theta)(t\theta)$ est dans $HRED_F$.*
***Erratum :** l'hypothèse de récurrence ne donne* pas *$t\theta \in HRED_{F_1}$ lorsque F_1 est trivial. Une façon de corriger tout le sujet était de (re)définir $HRED_{F_1}$ comme étant Λ pour tout type trivial F_1, pas seulement Ω.*
• $(\Rightarrow I)$. *On a $u = \lambda x.u_0$, $F = F_1 \Rightarrow F_2$, où F_2 est non trivial puisque F est non trivial. Pour tout $v \in HRED_{F_1}$, posons $\theta' = [x_1 := v_1, \cdots, x_n := v_n, x := v]$; l'hypothèse de récurrence nous donne $u_0\theta' \in HRED_{F_2}$. Si l'on a α-renommé de sorte à ce que x ne soit libre dans aucun v_i et différent de tous les x_i, alors $u_0\theta' = u_0\theta[x := v]$. En posant $t = u_0\theta$, nous avons montré que pour tout $v \in HRED_{F_1}$, $t[x := v]$ est dans $HRED_{F_2}$.*
Nous pouvons appliquer la question 8, car $HRED_{F_2}$ est un t-candidat (puisque F_2 est non trivial, question 6) et que $HRED_{F_1}$ contient toutes les variables. En effet, c'est clair si F_1 est trivial, auquel cas $HRED_{F_1} = \Lambda$, et sinon $HRED_{F_1}$ est un t-candidat, et alors HR3 implique qu'il contient toutes les variables, et en fait toutes les formes normales de tête. Alternativement, le lemme (L) montre que tout $HRED_{F_1}$ vérifie HR3, donc contient toutes les variables.
Nous en déduisons que $\lambda x.t$ est dans $HRED_{F_1 \Rightarrow F_2}$, mais ce terme est juste $u\theta$, par l'α-renommage de x.
• $(\cap E_1)$. *On a $u\theta \in HRED_{F_1 \cap F_2}$ par hypothèse de récurrence, et $F = F_1$, donc $u\theta \in HRED_{F_1}$. Similairement pour $(\cap E_2)$.*
• $(\cap I)$. *On a $F = F_1 \cap F_2$, où F est non trivial, donc F_1 ou F_2 est non trivial. Si F_1 et F_2 sont tous les deux non triviaux, par hy-*

pothèse de récurrence $u\theta \in HRED_{F_1}$ et $u\theta \in HRED_{F_2}$, donc $u\theta \in HRED_{F_1} \cap HRED_{F_2} = HRED_F$.

***Erratum :** Si seule l'une des deux formules est non triviale, disons F_1, alors par hypothèse de récurrence $u\theta \in HRED_{F_1}$, mais l'on ne pouvait pas conclure… désolé. Une façon de corriger tout le sujet était de (re)définir $HRED_F$ comme étant Λ pour tout type trivial F, pas seulement Ω.*

10. En déduire que tout λ-terme typable dans le système $\mathcal{D}\Omega$ a une forme normale de tête.

***Erratum :** il fallait lire : tout λ-terme typable* d'un type non trivial *dans le système $\mathcal{D}\Omega$ a une forme normale de tête.*

Si $\Gamma \vdash u : F$ est dérivable, alors prenons $v_i = x_i$. Par le lemme (L), $HRED_{F_i}$ vérifie HR3, donc toutes les variables sont dans $HRED_{F_i}$, donc nous pouvons appliquer la question précédente : $u = u\theta$ est dans $HRED_F$. Par HR1, u est dans HN.

11. En s'inspirant de résultats similaires vus en TD, montrer la réciproque : tout terme qui a une forme normale de tête est typable dans le système $\mathcal{D}\Omega$ d'un type non trivial, autrement dit, pour tout terme $u \in HN$ il existe une dérivation d'un jugement de la forme $\Gamma \vdash u : F$ avec F non trivial. Pour plus de lisibilité, on notera $\Omega^k \to F$ le type $\underbrace{\Omega \to \cdots \to \Omega \to}_{k \text{ fois}} F$. On notera aussi $\Gamma \cap \Delta$ le contexte obtenu en fusionnant les types des variables entre Γ et Δ, comme en TD.

Soit b un type de base. On commence d'abord par l'observation que tout terme en forme normale de tête $\lambda x_1, \cdots, x_n.xu_1 \cdots u_m$ est typable de type :

— *$\Omega^n \to b$ dans le contexte $x : \Omega^m \to b$ si $x \notin \{x_1, \cdots, x_n\}$ (pas la peine de typer les variables apparaissant dans $u_1, \ldots, u_m$) ;*
— *$\Omega^{i-1} \to (\Omega^m \to b) \to \Omega^{n-i} \to b$ si $x = x_i$.*

On montre ensuite que si $u \to_t u'$ et $\Gamma \vdash u' : F$ est dérivable, avec F non trivial, alors $\Gamma \vdash u : F$ est lui aussi dérivable. Ceci permettra de démontrer que tout terme u dans HN est typable d'un type non trivial en $\mathcal{D}\Omega$ par récurrence sur $\nu_t(u)$.

Je ne donne qu'une esquisse de démonstration.

Ecrivons u sous la forme $\lambda x_1, \cdots, x_n.(\lambda x.u_0)u_1 \cdots u_m$ ($m \geq 1$), de sorte que $u' = \lambda x_1, \cdots, x_n.u_0[x := u_1]u_2 \cdots u_m$.

Comme F est non trivial, F est une intersection de types (au moins un) de la forme $F_1 \to \cdots \to F_k \to G$, où G n'est pas un type flèche, *et n'est pas non plus trivial. De plus, $k \geq n$, et on a des dérivations de $\Gamma, x_1 : F_1, \cdots, x_n : F_n \vdash u_0[x := u_1]u_2 \cdots u_m : F_{n+1} \to \cdots \to F_k \to G$.*

Posons $\Delta = \Gamma, x_1 : F_1, \cdots, x_n : F_n$. Pour chacune, toujours par inspection on a des dérivations de $\Delta \vdash u_0[x := u_1] : G_2 \to \cdots \to G_m \to F_{n+1} \to \cdots \to F_k \to G$, et de $\Delta \vdash u_k : G_k$ ($2 \leq k \leq m$). Pour chaque occurrence d'un jugement typant u_1 dans les premières, on collecte les types correspondants, et on forme l'intersection H de ces types. On a alors $\Delta \cap (x : H) \vdash u_0 : G_2 \to \cdots \to G_m \to F_{n+1} \to \cdots \to F_k \to G$. On a alors $\Delta \vdash \lambda x.u_0 : H \to G_2 \to \cdots \to G_m \to F_{n+1} \to \cdots \to F_k \to G$, et d'autre part $\Delta \vdash u_1 : H$ (car u_1 ne peut pas contenir de variable libre qui soit liée dans u_0— c'est ici que la démonstration mériterait d'être plus détaillée), d'où $\Gamma \vdash u : F_1 \to \cdots \to F_n \to G$. Ceci étant vrai pour tous les types $F_1 \to \cdots \to F_n \to G$ dont l'intersection forme F, on a $\Gamma \vdash u : F$.